

FLORENTIN SMARANDACHE

GENERALISATIONS  
ET  
GENERALITES

---

Traduit du roumain  
par l'auteur  
et

*Eleonora Smarandache*

Assistés par  
*Sophie Mugnier*

# FLORENTIN SMARANDACHE

*Professeur de Mathématiques*

*Membre de l'Association Américaine de Mathématiques*

## GENERALISATIONS ET GENERALITES

---

Traduit du roumain

par l'auteur

et

*Eleonora Smarandache*

Assistés par

*Sophie Mugnier*

ÉDITION NOUVELLE 1984

**( C ) Edition Nouvelle, Fès ( maroc ), 1984**

**La reproduction, l'adaptation et la traduction partielles ou entières  
de cet ouvrage sont autorisées, à condition toutefois de citer le nom de l'auteur.**

## A V A N T - P R O C P O S

\*  
\* \* \*  
\*

"Généralisations et Généralités" , pourquoi ce titre ? Parce que l'auteur a voulu rassembler ici quelques-unes de ses recherches originales (qui sont donc des "généralités") , dans diverses branches des mathématiques (algèbre, théorie des nombres, géométrie, analyse, linguistique, mathématiques distrayantes) , même si les articles qui composent ce recueil n'ont pas toujours de liaison entre eux.

"Généralisations" , parce qu'un grand nombre d'articles élargissent des résultats connus , et ce grâce à un procédé simple, dont il est bon de dire quelques mots :

On généralise une proposition mathématique connue  $P(a)$  , où  $a$  est une constante , à la proposition  $P(n)$  , où  $n$  est une variable qui appartient à une partie de  $N$  . On démontre que  $P$  est vraie pour tout  $n$  par récurrence : la première étape est triviale, puisqu'il s'agit du résultat connu  $P(a)$  (et donc déjà vérifié avant par d'autres mathématiciens !). Pour passer de  $P(n)$  à  $P(n+1)$  , on utilise aussi  $P(a)$  : on élargit ainsi une proposition grâce à elle-même , autrement dit la généralisation trouvée sera paradoxalement démontrée à l'aide du cas particulier dont on est parti ! (cf. les généralisations de Hölder, Minkovski, Tchebychev, Euler).

L'auteur.

## TABLE DES MATIÈRES

## GENERALISATIONS

- Une généralisation de l'inégalité de Hölder: 5  
 Une généralisation de l'inégalité de Minkovski: 7  
 Une généralisation d'une inégalité de Tchebychev: 3  
 Une généralisation du théorème d'Euler: 9  
 Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Bouniakowski-Schwartz: 14  
 Une généralisation du théorème de Céva: 15  
 Une application de la généralisation du théorème de Céva: 13  
 Une généralisation d'un théorème de Carnot: 21  
 Quelques propriétés des nédianes: 23  
 Coefficients k-nomiaux: 24  
 Une classe d'ensembles récursifs: 27

## GENERALITES

- Sur quelques progressions: 34  
 Sur la résolution dans l'ensemble des naturels des équations linéaires: 36  
 Sur la résolution d'équations du second degré à deux inconnues dans  $\mathbb{Z}$ : 39  
 Convergence d'une famille de séries: 41  
 Des fantaisies mathématiques: 44  
 La fréquence des lettres (par groupes égaux) dans les textes juridiques roumains: 45  
 Hypothèses sur la détermination d'une règle pour les jeux de mots croisés: 46  
 Où se trouve la faute (équations diophantiennes) ?: 48  
 Où se trouve la faute (sur les intégrales) ?: 50  
 Où se trouve la faute (dans ce raisonnement par récurrence) ?: 51  
 Paradoxe mathématique ?: 52

## UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE HÖLDER

On généralise l'inégalité de Hölder grâce à un raisonnement par récurrence. Comme cas particuliers, on obtient une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz, et des applications intéressantes.

Théorème : Si  $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}_+$  et  $p_k \in ]1, +\infty[$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tels que  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ , alors :

$$\sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} \leq \prod_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n (a_i^{(k)})^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \quad \text{avec } m \geq 2.$$

Preuve : Pour  $m = 2$  on obtient justement l'inégalité de Hölder, qui est vraie. On suppose l'inégalité vraie pour les valeurs inférieures strictement à un certain  $m$ . Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \left( \left( \prod_{k=1}^{m-2} a_i^{(k)} \right) \cdot \left( a_i^{(m-1)} \cdot a_i^{(m)} \right) \right) \leq \\ &\leq \left( \prod_{k=1}^{m-2} \left( \sum_{i=1}^n (a_i^{(k)})^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n (a_i^{(m-1)} \cdot a_i^{(m)})^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

où  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{m-2}} + \frac{1}{p} = 1$  et  $p_h > 1$ ,  $1 \leq h \leq m-2$ ,  $p > 1$ ;

mais  $\sum_{i=1}^n (a_i^{(m-1)})^p \cdot (a_i^{(m)})^p \leq \left( \sum_{i=1}^n ((a_i^{(m-1)})^p)^{\frac{1}{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_1}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n ((a_i^{(m)})^p)^{\frac{1}{t_2}} \right)^{\frac{1}{t_2}}$

où  $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 1$  et  $t_1 > 1$ ,  $t_2 > 1$ . Il en résulte :

$$\sum_{i=1}^n (a_i^{(m-1)})^p (a_i^{(m)})^p \leq \left( \sum_{i=1}^n ((a_i^{(m-1)})^p)^{\frac{1}{t_1}} \right)^{\frac{1}{t_1}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n ((a_i^{(m)})^p)^{\frac{1}{t_2}} \right)^{\frac{1}{t_2}},$$

avec  $\frac{1}{pt_1} + \frac{1}{pt_2} = \frac{1}{p}$ .

Notons  $pt_1 = p_{m-1}$  et  $pt_2 = p_m$ . Donc  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ , et on a

$p_j > 1$  pour  $1 \leq j \leq m$  : il en résulte l'inégalité du théorème.

Remarque : Si on pose  $p_j = m$  pour  $1 \leq j \leq m$  et si on élève à la puissance  $m$  cette inégalité, on obtient une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz :

$$\left( \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} \right)^m \leq \prod_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(k)} \right)^m.$$

Application : Soient les réels positifs  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ .

Montrer que :

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^6 \leq 8 (a_1^6 + a_2^6) (b_1^6 + b_2^6) (c_1^6 + c_2^6).$$

Solution :

Utilisons le théorème antérieur. Posons  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 6$ , il en découle que :

$$a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 \leq (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^3 + b_2^3)^{\frac{1}{3}} (c_1^6 + c_2^6)^{\frac{1}{6}}, \text{ ou encore :}$$

$$(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^6 \leq (a_1^2 + a_2^2)^3 (b_1^3 + b_2^3)^2 (c_1^6 + c_2^6),$$

et sachant que  $(b_1^3 + b_2^3)^2 \leq 2(b_1^6 + b_2^6)$

$$\text{et que } (a_1^2 + a_2^2)^3 = a_1^6 + a_2^6 + 3(a_1^4 a_2^2 + a_1^2 a_2^4) \leq$$

$$\leq 4(a_1^6 + a_2^6),$$

puisque  $a_1^4 a_2^2 + a_1^2 a_2^4 \leq a_1^6 + a_2^6$  (parce que :

$$-(a_2^2 - a_1^2)^2 (a_1^2 + a_2^2) \leq 0,$$

il en résulte l'exercice proposé.

## UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE MINKOWSKI

Théorème : Si  $p$  est un nombre réel  $\geq 1$  et  $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}^+$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , alors :

$$\left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_i^{(k)} \right)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} \right)^p \right)^{1/p}$$

Démonstration par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Tout d'abord on montre que :

$\left( \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(1)} \right)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(1)} \right)^p \right)^{1/p}$ , ce qui est évident et prouve que l'inégalité est vraie pour  $m=1$ .

(Le cas  $m=2$  constitue justement l'inégalité de Minkowski, qui est naturellement vraie !).

On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures ou égales à  $m$ .

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{m+1} a_i^{(k)} \right)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(1)} \right)^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=2}^{m+1} a_i^{(k)} \right)^p \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(1)} \right)^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=2}^{m+1} \left( \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} \right)^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

et cette dernière somme vaut  $\left( \sum_{k=1}^{m+1} \left( \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} \right)^p \right)^{1/p}$ ,

donc l'inégalité est vraie au rang  $m+1$ .

## UNE GENERALISATION D'UNE INEGALITE DE TCHEBYCHEV

Enoncé : Si  $a_i^{(k)} \geq a_{i+1}^{(k)}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , alors :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} \geq \frac{1}{n^m} \prod_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_i^{(k)}$ .

Démonstration par récurrence sur  $m$ .

$$\text{Cas } m=1 \text{ évident : } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{(1)} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{(1)}$$

Quant au cas  $m=2$ , c'est l'inégalité de Tchebychev elle-même :

$$\text{Si } a_1^{(1)} \geq a_2^{(1)} \geq \dots \geq a_n^{(1)} \text{ et } a_1^{(2)} \geq a_2^{(2)} \geq \dots \geq a_n^{(2)}, \text{ alors :}$$

$$\frac{a_1^{(1)} a_2^{(2)} + a_1^{(2)} a_2^{(1)} + \dots + a_n^{(1)} a_n^{(2)}}{n} \geq \frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \dots + a_n^{(1)}}{n} \times \frac{a_1^{(2)} + \dots + a_n^{(2)}}{n}.$$

On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures ou égales à  $m$ . Il faut passer au rang  $m+1$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^{m+1} a_i^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} \right) \cdot a_i^{(m+1)}.$$

$$\text{Ceci est } \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} \right) \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{(m+1)} \right) \geq$$

$$\geq \left( \frac{1}{n^m} \prod_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} \right) \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{(m+1)} \right)$$

$$\text{et ceci vaut justement } \frac{1}{n^{m+1}} \prod_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^n a_i^{(k)} \quad (\text{cqfd}).$$

## UNE GENERALISATION DU THEOREME D'EULER

Dans les paragraphes qui suivent nous allons démontrer un résultat qui remplace le théorème d'Euler :

"Si  $(a, m) = 1$ , alors  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ "

dans le cas où  $a$  et  $m$  ne sont pas premiers entre eux.

### A - Notions introducives.

On suppose  $m > 0$ . Cette supposition ne nuit pas à la généralité, parce que l'indicatrice d'Euler satisfait l'égalité :

$\varphi(m) = \varphi(-m)$  (cf [1]), et que les congruences vérifient la propriété suivante :

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a \equiv b \pmod{-m} \quad (\text{cf [1] pp 12-13}).$$

Quant à la relation de congruence modulo 0, c'est la relation d'égalité. On note  $(a, b)$  le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers  $a$  et  $b$ , et on choisit  $(a, b) > 0$ .

### B - Lemmes, théorème.

Lemme 1 : Soit  $a$  un nombre entier et  $m$  un naturel  $> 0$ . Il existe  $d_o, m_o$  de  $\mathbb{N}$  tels que  $a = a_o d_o$ ,  $m = m_o d_o$  et  $(a_o, m_o) = 1$ .

Preuve : il suffit de choisir  $d_o = (a, m)$ . En conformité avec la définition du PGCD, les quotients  $a_o$  et  $m_o$  de  $a$  et  $m$  par leur PGCD sont premiers entre eux (cf [3] pp 25-26).

Lemme 2 : Avec les notations du lemme 1, si  $d_o \neq 1$  et si :  
 $d_o = d_o^1 d_1$ ,  $m_o = m_1 d_1$ ,  $(d_o^1, m_1) = 1$  et  $d_1 \neq 1$ , alors  
 $d_o > d_1$  et  $m_o > m_1$ , et si  $d_o = d_1$ , alors après un nombre limité de pas on a  $d_o > d_{i+1} = (d_i, m_i)$ .

Preuve :

$$(0) \begin{cases} a = a_o d_o & ; \quad (a_o, m_o) = 1 \\ m = m_o d_o & \quad d_o \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_o = d_o^1 d_1 & ; \quad (d_o^1, m_1) = 1 \\ m_o = m_1 d_1 & \quad d_1 \neq 1 \end{cases}$$

De (0) et de (1) il résulte que  $a = a_o d_o = a_o d_o^1 d_1$  donc  $d_o = d_o^1 d_1$  donc  $d_o > d_1$  si  $d_o^1 \neq 1$ .

De  $m_o = m_1 d_1$  on déduit que  $m_o > m_1$ .

Si  $d_o = d_1$  alors  $m_o = m_1 d_1 = k \cdot d_o^z$  ( $z \in \mathbb{N}^*$  et  $d_o \nmid k$ ).

Donc  $m_1 = k \cdot d_o^{z-1}$ ;  $d_2 = (d_1, m_1) = (d_o, k \cdot d_o^{z-1})$ . Après  $i=z$  pas il vient  $d_{i+1} = (d_o, k) < d_o$ .

Lemme 3 : Pour chaque nombre entier  $a$  et chaque nombre naturel  $m > 0$  on peut construire la séquence suivante des relations :

$$(0) \begin{cases} a = a_{00}^1 ; (a_0, m_0) = 1 \\ m = m_{00}^1 d_0 ; d_0 \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_0 = d_{01}^1 d_1 ; (d_{01}^1, m_1) = 1 \\ m_0 = m_{11}^1 d_1 ; d_1 \neq 1 \end{cases}$$

.....

$$(s-1) \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1 d_{s-1} ; (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1}^1 d_{s-1} ; d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s ; (d_{s-1}^1, m_s) = 1 \\ m_{s-1} = m_s^1 d_s ; d_s \neq 1 \end{cases}$$

Preuve : On peut construire cette séquence en appliquant le lemme 1. La séquence est limitée, d'après le lemme 2, car après  $r_1$  pas on a :  $d_0 > d_{r_1}$  et  $m_0 > m_{r_1}$ , et après

$r_2$  pas on a :  $d_{r_1} > d_{r_1+r_2}$  et  $m_{r_1} > m_{r_1+r_2}$ , etc...,

et les  $m_i$  sont des naturels. On arrive à  $d_s = 1$  parce que si  $d_s \neq 1$  on va construire de nouveau un nombre limité de relations  $(s+1), \dots, (s+r)$ , avec  $d_{s+r} < d_s$ .

Théorème : Soient  $a, m \in \mathbb{Z}$  et  $m \neq 0$ . Alors  $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$  où  $m$  et  $m_s$  sont les mêmes que dans les lemmes ci-dessus.

Preuve : Comme dans ce qui précède on peut supposer  $m > 0$  sans nuire à la généralité. De la séquence de relations du lemme 3 il résulte que :

$$\begin{array}{ccccccccc} (0) & (1) & (2) & (3) & (s) \\ a = a_{00}^1 & = a_{00}^1 d_{01}^1 & = a_{00}^1 d_{01}^1 d_{12}^1 & = \dots & = a_{00}^1 d_{01}^1 \dots d_{s-1}^1 d_s \\ (0) & (1) & (2) & (3) & (s) \\ \text{et } m = m_{00}^1 d_0 & = m_{11}^1 d_1 & = m_{22}^1 d_2 & = \dots & = m_{ss}^1 d_s \dots d_{s-1}^1 d_0 \end{array}$$

$$\text{et } m_{ss}^1 d_s \dots d_{s-1}^1 d_0 = d_{01}^1 \dots d_{s-1}^1 d_s^m,$$

De (0) il découle que  $d_0 = (a, m)$ , et de (i) que  $d_i = (d_{i-1}, m_{i-1})$ , ce pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, s\}$ .

$$d_0 = d_{01}^1 d_{12}^1 \dots d_{s-1}^1 d_s$$

$$d_1 = d_{12}^1 d_{23}^1 \dots d_{s-1}^1 d_s$$

.....

$$d_{s-1} = \dots \quad d_{s-1}^1 d_s$$

$$d_s = \dots \quad d_s$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a_0^{d_1} a_1^{d_2} \dots a_{s-1}^{d_s} &= (a_0^1)^1 (a_1^1)^2 (a_2^1)^3 \dots (a_{s-1}^1)^s (a_s^1)^{s+1} \\ &= (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s \text{ car } d_s = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } m = (d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-1}^1)^s \cdot m_s ; \text{ donc } m_s \mid m ;$$

$$(d_s, m_s) \stackrel{(s)}{=} 1 \quad \text{et} \quad (d_{s-1}, m_s) \stackrel{(s)}{=} 1$$

$$1 \stackrel{(s-1)}{=} (d_{s-2}, m_{s-1}) = (d_{s-2}, m_s) \quad \text{donc } (d_{s-2}, m_s) = 1$$

$$1 \stackrel{(s-2)}{=} (d_{s-3}, m_{s-2}) = (d_{s-3}, m_{s-1} d_{s-1}) = (d_{s-3}, m_s d_s d_{s-1}) , \\ \text{donc } (d_{s-3}, m_s) = 1$$

.....

$$1 \stackrel{(i+1)}{=} (d_i^1, m_{i+1}) = (d_i^1, m_{i+2} d_{i+2}) = (d_i^1, m_{I+3} d_{i+3} d_{i+2}) = \dots = \\ = (d_i^1, m_s d_s d_{s-1} \dots d_{i+2}) \quad \text{donc } (d_i^1, m_s) = 1, \text{ et ce} \\ \text{pour tout } i \in \{0, 1, \dots, s-2\} .$$

.....

$$1 \stackrel{(0)}{=} (a_0, m_0) = (a_0, d_1 \dots d_{s-1} d_s m_s) \quad \text{donc } (a_0, m_s) = 1 .$$

Du théorème d'Euler il résulte que :

$$(d_i^1)^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s} \quad \text{pour tout } i \in \{0, 1, \dots, s\} ,$$

$$a_0^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$$

$$\text{mais } a_0^{\varphi(m_s)} = a_0^{\varphi(m_s)} (d_0^1)^{\varphi(m_s)} (d_1^1)^{\varphi(m_s)} \dots (d_{s-1}^1)^{\varphi(m_s)}$$

$$\text{donc } a_0^{\varphi(m_s)} \equiv \underbrace{1 \dots 1}_{s+1 \text{ fois}} \pmod{m_s} .$$

$$a_0^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s} .$$

$$a_0^s \cdot (d_0^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} (d_2^1)^{s-3} \dots (d_{s-2}^1)^1 \cdot a_0^{\varphi(m_s)} \equiv$$

$$\equiv a_0^s \cdot (d_0^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} \dots (d_{s-2}^1)^1 \cdot 1 \pmod{m_s} .$$

On multiplie par :

$$(d_0^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \dots (d_{s-2}^1)^{s-1} (d_{s-1}^1)^s \quad \text{et on obtient :}$$

$$a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s \stackrel{\varphi(m_s)}{=} a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s \\ (\text{mod } (d_0^1)^1 \dots (d_{s-1}^1)^s m_s)$$

mais  $a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-1}^1)^s \cdot a = a^{\varphi(m_s)+s}$  et  
 $a_0^s (d_0^1)^s (d_1^1)^s \dots (d_{s-1}^1)^s = a^s$  donc  $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$ ,  
pour tous  $a, m$  de  $\mathbb{Z}$  ( $m \neq 0$ ).

Observations :

(1) Si  $(a, m) = 1$  alors  $d_0 = 1$ . Donc  $s = 0$ , et d'après le théorème  
 $\varphi(m_0)+0 = 0$  on a  $a^{\varphi(m_0)+0} \equiv a^0 \pmod{m}$  c'est à dire  $a^0 \equiv 1 \pmod{m}$ .  
Mais  $m = m_0 d_0 = m_0 \cdot 1 = m_0$ . Donc :

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \text{ et on obtient le théorème d'Euler.}$$

(2) Soient  $a$  et  $m$  deux nombres entiers,  $m \neq 0$  et  $(a, m) = d_0 \neq 1$ ,  
et  $m = m_0 d_0$ . Si  $(d_0, m_0) = 1$ , alors  $a^{(\varphi(m_0)+1)} \equiv a^s \pmod{m}$ .

En effet, vient du théorème avec  $s = 1$  et  $m_1 = m_0$ .

Cette relation a une forme semblable au théorème de Fermat :

$$a^{\varphi(p)+1} \equiv a \pmod{p}.$$

C - UN ALGORITHME POUR RESOUDRE LES CONGRUENCES.

On va construire un algorithme et montrer le schéma logique permettant de calculer  $s$  et  $m_s$  du théorème.

Données à entrer : deux nombres entiers  $a$  et  $m$ ,  $m \neq 0$ .

Résultats en sortie :  $s$  et  $m_s$  ainsi que  $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod{m}$ .

Méthode : (1)  $A := a$

$$M := m$$

$$i := 0$$

(2) Calculer  $d = (\mathbf{A}, \mathbf{M})$  et  $M' = M/d$ .

(3) Si  $d = 1$  prendre  $S = i$  et  $m_s = M'$ ; stop.

$$\text{Si } d \neq 1 \text{ prendre } A := d, M := M',$$

$$i := i+1, \text{ et aller en (2).}$$

Rem : la correction d'algorithme résulte du lemme 3 et du théorème.

Voir organigramme page suivante.

Dans cet organigramme, SUBROUTINE CMEDC calcule  $D = (\mathbf{A}, \mathbf{M})$  et choisit  $D > 0$ .

Application : Dans la résolution des exercices on utilise le théorème et l'algorithme pour calculer  $s$  et  $m_s$ .

Exemple :  $6^{25604} \equiv ? \pmod{105765}$

L'on ne peut pas

appliquer Fermat ou Euler car  $(6, 105765) = 3 \neq 1$ .

On applique donc l'algorithme pour calculer  $s$  et  $m_s$  et puis le théorème antérieur :

$$d_0 = (6, 105765) = 3 \quad m_0 = 105765/3 = 35255$$

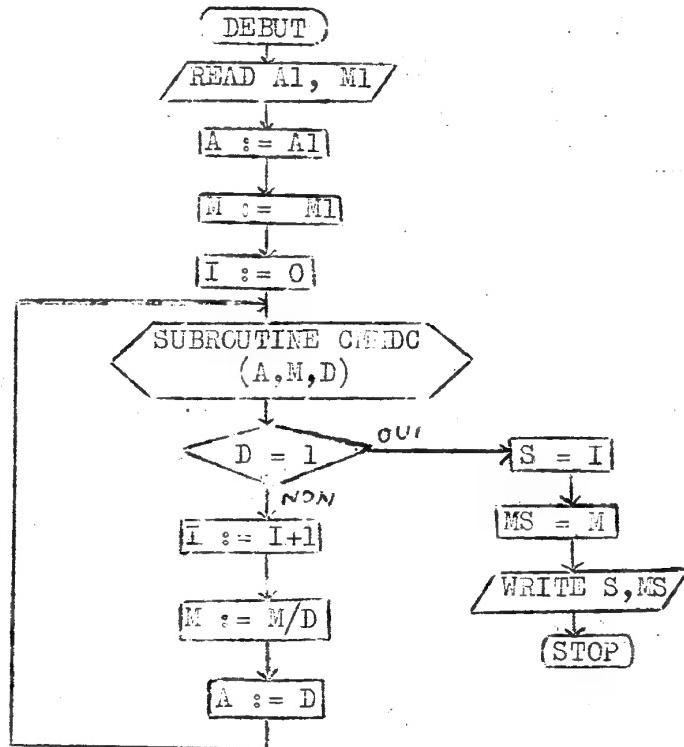
$$i = 0; 3 \neq 1 \text{ donc } i = 0 + 1 = 1, d_1 = (3, 35255) = 1,$$

$$m_1 = 35255/1 = 35255.$$

Donc  $6^{\varphi(35255)+1} \equiv 6^1 \pmod{105765}$  donc  
 $6^{25604} \equiv 6^4 \pmod{105765}$ .

\*\*\*

Organigramme :



\*\*\*

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [1] Popovici, Constantin P. - "Teoria numerelor", Curs, Bucarest, Editura didactică și pedagogică, 1973.
- [2] Popovici, Constantin P. - "Logica și teoria numerelor", Editura didactică și pedagogică, Bucarest, 1970.
- [3] Creangă I, Cazacu C, Mihut P, Opait Gh, Reischer Corina - "Introducere în teoria numerelor", Editura didactică și pedagogică, Bucarest, 1965.
- [4] Rusu E. - "Arithmetica și teoria numerelor", Editura didactică și pedagogică, Ediția a 2-a, Bucarest, 1963.

## UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE CAUCHY-BOUNIAKOVSKI-SCHWARTZ

Enoncé : Soient les réels  $a_i^{(k)}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , avec  $m \geq 2$ . Alors :

$$\left( \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^m a_i^{(k)} \right)^2 \leq \prod_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (a_i^{(k)})^2.$$

Démonstration. On note A le membre de gauche de l'inégalité et B le membre de droite. On a :

$$A = \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(1)} \dots a_i^{(m)} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \left( a_i^{(1)} \dots a_i^{(m)} \right) \left( a_k^{(1)} \dots a_k^{(m)} \right)$$

$$\text{et } B = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in E} \left( a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_m}^{(m)} \right)^2,$$

où  $E = \{(i_1, \dots, i_m) / i_k \in \{1, 2, \dots, n\}, 1 \leq k \leq m\}$ . D'où :

$$B = \sum_{i=1}^n \left( a_i^{(1)} \dots a_i^{(m)} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \left[ \left( a_i^{(1)} \dots a_i^{(m-1)} a_k^{(m)} \right)^2 + \left( a_k^{(1)} \dots a_k^{(m-1)} a_i^{(m)} \right)^2 \right] + \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \in \\ E - (\Delta_E \cup L)}} \left( a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_m}^{(m)} \right)^2,$$

$$\text{avec } \Delta_E = \left\{ \underbrace{(\alpha, \dots, \alpha)}_{m \text{ fois}} / \alpha \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

$$\text{et } L = \left\{ \underbrace{(\alpha, \dots, \alpha, \beta)}_{m-1} / (\alpha, \beta) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \text{ et } \alpha < \beta \right\}.$$

$$\text{Alors } A-B = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \left[ - \left( a_i^{(1)} \dots a_i^{(m-1)} a_k^{(m)} - a_k^{(1)} \dots a_k^{(m-1)} a_i^{(m)} \right)^2 \right] - \sum_{(i_1, \dots, i_m) \in E - (\Delta_E \cup L)} \left( a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_m}^{(m)} \right)^2 \leq 0$$

Remarque ; pour  $m=2$  on obtient l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwartz.

## GENERALISATIONS DU THEOREME DE CEVA

Dans ces paragraphes on présente trois généralisations du célèbre théorème de Ceva, dont l'énoncé est :

"Si dans un triangle ABC on trace les droites concourantes  $AA_1$ ,

$$BB_1, CC_1 \text{ alors } \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

Théorème : Soit le polygone  $A_1 A_2 \dots A_n$  un point M dans son plan,

et une permutation circulaire  $p = (1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n) \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1 \ 1$ . On note  $M_{ij}$

les intersections de la droite  $A_iM$  avec les droites  $A_{i+s} A_{i+s+1}, \dots, A_{i+t-1} A_{i+t}$  (pour tous i et j,  $j \in \{i+s, \dots, i+t-1\}$ ).

Si  $M_{ij} \neq A_i$  pour tous les indices respectifs, et si  $2s+t = n$ , on a :

$$\prod_{i,j=1, i \neq s}^{n, i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_i}}{\overline{M_{ij}A_p(j)}} = (-1)^n \quad (s \text{ et } t \text{ naturels non nuls}).$$

Démonstration analytique : Soit M un point dans le plan du triangle ABC, tel qu'il satisfasse aux conditions du théorème. On choisit un système cartésien d'axes, tel que les deux parallèles aux axes qui passent par M ne passent par aucun point  $A_i$  (ce qui est possible).

On considère  $M(a,b)$ , où a et b sont des variables réelles, et  $A_i(X_i, Y_i)$ , où  $X_i$  et  $Y_i$  sont connues,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Le choix précédent nous assure les relations suivantes :

$X_i-a \neq 0$  et  $Y_i-b \neq 0$  pour tout i de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

L'équation de la droite  $A_iM$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est :

$$\frac{x-a}{X_i-a} - \frac{y-b}{Y_i-b} = 0. \text{ On la note } d(x,y; X_i, Y_i) = 0.$$

$$\text{On a } \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = \frac{d(A_j, A_iM)}{d(A_{p(j)}, A_iM)} = \frac{d(X_j, Y_j; X_i, Y_i)}{d(X_{p(j)}, Y_{p(j)}; X_i, Y_i)} = \frac{D(j,i)}{D(p(j), i)}.$$

Où  $d(A, ST)$  est la distance de A à la droite ST, et où l'on note  $D(a,b)$  pour  $d(X_a, Y_a; X_b, Y_b)$ .

Calculons le produit, où nous utiliserons la convention suivante :

a+b signifiera  $\underbrace{p(p(\dots p(a)\dots))}_{b \text{ fois}}$  et a-b signifiera  $\underbrace{p^{-1}(p^{-1}(\dots p^{-1}(a)\dots))}_{b \text{ fois}}$

$$\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} = \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{D(j,i)}{D(j+1,i)} =$$

$$\frac{D(i+s,i)}{D(i+s+1,i)} \cdot \frac{D(i+s+2,i)}{D(i+s+3,i)} \cdots \frac{D(i+s+t,i)}{D(i+s+t+1,i)} = \frac{D(i+s,i)}{D(i+s+t,i)} = \frac{D(i+s,i)}{D(i-s,i)}.$$

Le produit initial est égal à :

$$\prod_{i=1}^n \frac{D(i+s, i)}{D(i-s, i)} = \frac{D(1+s, 1)}{D(1-s, 1)} \frac{D(2+s, 2)}{D(2-s, 2)} \dots \frac{D(2s, s)}{D(n, s)} \cdot \frac{D(2s+1, s+1)}{D(1, s+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{D(2s+2, s+2)}{D(2, s+2)} \dots \frac{D(2s+t, s+t)}{D(t, s+t)} \cdot \frac{D(2s+t+1, s+t+1)}{D(t+1, s+t+1)} \cdot \frac{D(2s+t+2, s+t+2)}{D(t+2, s+t+2)} \dots$$

$$\dots \frac{D(2s+t+s, s+t+s)}{D(t+s, s+t+s)} = \frac{D(1+s, 1)}{D(1, 1+s)} \frac{D(2+s, 2)}{D(2, 2+s)} \dots \frac{D(2s+t, s+t)}{D(s+t, 2s+t)} \dots \frac{D(s, n)}{D(n, s)} =$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{D(i+s, i)}{D(i, i+s)} = \prod_{i=1}^n \left(-\frac{P(i+s)}{P(i)}\right) = (-1)^n \text{ parce que :}$$

$$\frac{\frac{X_r - a}{r} - \frac{Y_r - b}{r}}{\frac{X_p - a}{p} - \frac{Y_p - b}{p}} = -\frac{(X_r - a)(Y_r - b)}{(X_p - a)(Y_p - b)} = -\frac{P(r)}{P(p)},$$

$$\frac{\frac{X_r - a}{r} - \frac{Y_r - a}{r}}{\frac{X_p - a}{p} - \frac{Y_p - a}{p}}$$

la dernière égalité résultant de ce que l'on note :

$(X_t - a)(Y_t - b) = P(t)$ . De (1) il résulte que  $P(t) \neq 0$  pour tout  $t$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . La démonstration est terminée.

#### Commentaires sur le théorème :

$t$  représente le nombre des droites du polygone qui sont coupées par une droite  $A_i M$ ; si on note les côtés  $A_i A_{i+1}$  du polygone  $a_i$ ,

alors  $s+1$  représente l'ordre de la première droite coupée par la droite  $A_1 M$  (c'est à  $s+1$  la première droite coupée par  $A_1 M$ ).

Exemple : Si  $s = 5$  et  $t = 3$ , le théorème dit que :

- la droite  $A_1 M$  coupe les côtés  $A_6 A_7$ ,  $A_7 A_8$ ,  $A_8 A_9$ .

- la droite  $A_2 M$  coupe les côtés  $A_7 A_8$ ,  $A_8 A_9$ ,  $A_9 A_{10}$ .

- la droite  $A_3 M$  coupe les côtés  $A_8 A_9$ ,  $A_9 A_{10}$ ,  $A_{10} A_{11}$ , etc...

Observation : la condition restrictive du théorème est nécessaire

pour l'existence des rapports  $\frac{M_i A_j}{M_{ij} A_p(j)}$ .

Conséquence 1 : Soient un polygone  $A_1 A_2 \dots A_{2k+1}$  et un point  $M$  dans son plan. Pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, 2k+1\}$ , on note  $M_i$  l'intersection de la droite  $A_i A_{p(i)}$  avec la droite qui passe par  $M$  et par le sommet opposé à cette droite. Si  $M_i \notin \{A_i, A_{p(i)}\}$  alors on a :

$$\prod_{i=1}^n \frac{\overline{M_i A_i}}{\overline{M_i A_{p(i)}}} = -1.$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème, puisqu'on a  $s = k$  et  $t = 1$ , c'est-à-dire  $n = 2k+1$ .

La réciproque de cette conséquence n'est pas vraie.

D'où il résulte immédiatement que la réciproque du théorème n'est pas non plus vraie.

Contre-exemple :

On considère un polygone de 5 côtés. On trace les droites  $A_1 M_3$ ,  $A_2 M_4$  et  $A_3 M_5$  concourantes en  $M$ .

$$\text{Soit } K = \frac{3}{M A_3} \cdot \frac{3}{M A_4} \cdot \frac{5}{M A_5}$$

$$= \frac{M A_1}{3} \cdot \frac{M A_2}{4} \cdot \frac{M A_1}{5}$$

Puis on trace la droite  $A_4 M_1$  telle qu'elle ne passe pas par  $M$  et telle qu'elle forme le rapport : (2)

$$\frac{M A_1}{M A_2} = 1/K \text{ ou } 2/K. \text{ (on choisit l'une de ces valeurs, pour que } A_4 M_1 \text{ ne passe pas par } M). \frac{M A_1}{M A_2}$$

A la fin on trace  $A_5 M_2$  qui forme le rapport  $\frac{M A_2}{M A_3} = -1$  ou  $-\frac{1}{2}$

en fonction de (2). Donc le produit :

$$\prod_{i=1}^5 \frac{M_i A_i}{M_{i p(i)} A_{p(i)}} = -1 \text{ sans que les droites respectives soient concourantes.}$$

Conséquence 2 : Dans les conditions du théorème, si pour tout  $i$  et  $j$ ,  $j \notin \{i, p^{-1}(i)\}$ , on note  $M_{ij} = A_i M_j \cap A_{p(j)}$ , et

$M_{ij} \notin \{A_j, A_{p(j)}\}$ , alors on a :

$$\prod_{i,j=1}^n \frac{M_{ij} A_j}{M_{ij} A_{p(j)}} = (-1)^n.$$

$j \notin \{i, p^{-1}(i)\}$

En effet on a  $s=1$ ,  $t=n-2$ , et donc  $2s+t = n$ .

Conséquence 3 : Pour  $n = 3$ , il vient  $s = 1$  et  $t = 1$ , càd on obtient (comme cas particulier) le théorème de Céva.

UNE APPLICATION DE LA GENERALISATION  
DU THEOREME DE CEVA

Théorème : Soit un polygone  $A_1 A_2 \dots A_n$  inscrit dans un cercle. Soient  $s$  et  $t$  deux naturels non nuls tels que  $2s + t = n$ . Par chaque sommet  $A_i$  passe une droite  $d_i$  qui coupe les droites  $A_{i+s} A_{i+s+1}, \dots, A_{i+s+t-1} A_{i+s+t}$  aux points  $M_{i,i+s}, \dots, M_{i,i+s+t-1}$ , et le cercle au point  $A'_i$ . Alors on a :

$$\prod_{i=1}^n \frac{M_{i,j} A_j}{M_{i,j} A_{j+1}} = \prod_{i=1}^n \frac{M'_i A_{i+s}}{M'_i A_{i+s+t}}.$$

Preuve :

Soit  $i$  fixé.

1°) Cas où le point  $M_{i,i+s}$  se trouve à l'intérieur du cercle :

On a les triangles  $A_i M_{i,i+s} A_{i+s}$

et  $M_{i,i+s} A_{i+s+1} A_{i+s+2}$  semblables,

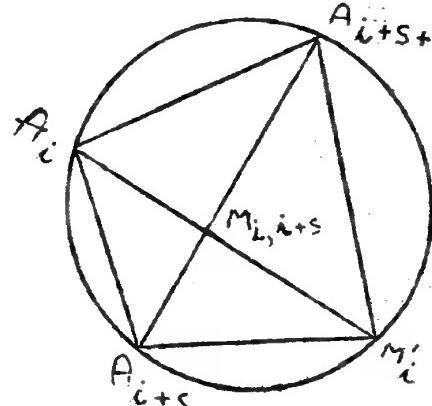
puisque les angles  $M_{i,i+s} A_{i+s} A_{i+s+1}$

et  $M_{i,i+s} A_{i+s+1} M'_i$  d'une part,

et  $A_i M_{i,i+s} A_{i+s}$  et  $A_{i+s+1} M_{i,i+s} M'_i$

sont égaux. Il en résulte que :

$$(1) \frac{M_{i,i+s} A_i}{M_{i,i+s} A_{i+s+1}} = \frac{A_i A_{i+s}}{M'_i A_{i+s+1}}.$$



De manière analogue, on montre que les triangles  $M_{i,i+s} A_{i+s} A_{i+s+1}$  et  $M_{i,i+s} A_{i+s+1} M'_i$  sont semblables, d'où :

$$(2) \frac{M_{i,i+s} A_i}{M_{i,i+s} A_{i+s}} = \frac{A_i A_{i+s+1}}{M'_i A_{i+s}}. \text{ On divise (1) par (2) et on obtient :}$$

$$(3) \frac{M_{i,i+s} A_{i+s}}{M_{i,i+s} A_{i+s+1}} = \frac{M'_i A_{i+s}}{M'_i A_{i+s+1}} \cdot \frac{A_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+1}}.$$

2°) Le cas où  $M_{i,i+s}$  est extérieur au cercle est similaire au premier, parce que les triangles (notés comme au 1°) sont semblables aussi dans ce nouveau cas. On a les mêmes raisonnements et les mêmes rapports, donc on a aussi la relation (3).

Calculons le produit :

$$\begin{aligned}
 & \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{M'_i A_j}{A_i A_{j+1}} = \\
 & = \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \left( \frac{\frac{M'_i A_j}{A_i A_j}}{\frac{M'_i A_{j+1}}{A_i A_{j+1}}} \right) = \\
 & = \frac{\frac{M'_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s}} \cdot \frac{M'_i A_{i+s+1}}{A_i A_{i+s+1}} \cdots \frac{M'_i A_{i+s+t-1}}{A_i A_{i+s+t-1}}}{\frac{M'_i A_{i+s+1}}{A_i A_{i+s+1}} \cdot \frac{M'_i A_{i+s+2}}{A_i A_{i+s+2}} \cdots \frac{M'_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t}}} \\
 & \cdot \frac{\frac{A_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+1}} \cdot \frac{A_i A_{i+s+1}}{A_i A_{i+s+2}} \cdots \frac{A_i A_{i+s+t-1}}{A_i A_{i+s+t}}}{\frac{A_i A_{i+s+1}}{A_i A_{i+s+2}} \cdot \frac{A_i A_{i+s+2}}{A_i A_{i+s+3}} \cdots \frac{A_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t+1}}} = \frac{\frac{M'_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+1}}}{\frac{M'_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t+1}}} \cdot \frac{\frac{A_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+1}}}{\frac{A_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t+1}}}.
 \end{aligned}$$

Donc le produit initial est égal à :

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{\frac{M'_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+t}}}{\frac{M'_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t}}} \cdot \frac{\frac{A_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+t}}}{\frac{A_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t}}} \right) = \prod_{i=1}^n \frac{\frac{M'_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+t}}}{\frac{M'_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t}}},$$

puisque :

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^n \frac{\frac{A_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s+t}}}{\frac{A_i A_{i+s+t}}{A_i A_{i+s+t}}} &= \frac{\frac{A_1 A_{1+s}}{A_1 A_{1+s+t}}}{\frac{A_1 A_{1+s+t}}{A_1 A_{1+s+t}}} \cdot \frac{\frac{A_2 A_{2+s}}{A_2 A_{2+s+t}}}{\frac{A_2 A_{2+s+t}}{A_2 A_{2+s+t}}} \cdots \frac{\frac{A_s A_{2s}}{A_s A_{2s+t}}}{\frac{A_s A_{2s+t}}{A_s A_{2s+t}}} \cdot \frac{\frac{A_{s+1} A_{2s+1}}{A_{s+1} A_{2s+1}}}{\frac{A_{s+1} A_{2s+1}}{A_{s+1} A_{2s+1}}} \cdots \\
 &\frac{\frac{A_{s+2} A_{2s+2}}{A_{s+2} A_{2s+2}}}{\frac{A_{s+2} A_{2s+2}}{A_{s+2} A_{2s+2}}} \cdots \frac{\frac{A_{s+t} A_n}{A_{s+t} A_n}}{\frac{A_{s+t} A_n}{A_{s+t} A_n}}, \frac{\frac{A_{s+t+1} A_1}{A_{s+t+1} A_1}}{\frac{A_{s+t+1} A_1}{A_{s+t+1} A_1}} \cdot \frac{\frac{A_{s+t+2} A_2}{A_{s+t+2} A_2}}{\frac{A_{s+t+2} A_2}{A_{s+t+2} A_2}} \cdots \frac{\frac{A_n A_s}{A_n A_s}}{\frac{A_n A_s}{A_n A_s}} = 1
 \end{aligned}$$

(en tenant compte du fait que  $2s + t = n$ ).

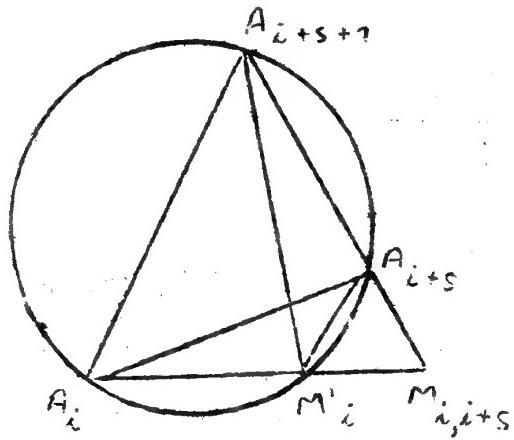
Conséquence 1 : Si on a un polygone  $A_1 A_2 \cdots A_{2s-1}$  inscrit dans un cercle, et que de chaque sommet  $A_i$  on trace une droite  $d_i$  qui coupe le côté opposé  $A_{i+s-1} A_{i+s}$  en  $M_i$ , et le cercle en  $M'_i$ , alors :

$$\prod_{i=1}^n \frac{\frac{M'_i A_{i+s-1}}{A_i A_{i+s}}}{\frac{M'_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s}}} = \prod_{i=1}^n \frac{\frac{M'_i A_{i+s-1}}{A_i A_{i+s}}}{\frac{M'_i A_{i+s}}{A_i A_{i+s}}}.$$

En effet pour  $n = 1$ , on a  $n$  impair et  $s = \frac{n+1}{2}$ .

Si on fait  $s = 1$  dans cette conséquence, on retrouve la note mathématique de [1], pages 35-37.

Application : si dans le théorème, les droites  $d_i$  sont concourantes, on obtient :



$$\prod_{i=1}^n \frac{\overline{M' A_{i i+s}}}{\overline{M' A_{i i+s+t}}} = (-1)^n$$

(Pour cela, voir [2]).

Bibliographie :

- [1] Dan Barbilian, Ion-Barbu - "Pagini inedite", Editura Albatros , Bucarest , 1981 (Ediție îngrijită de Gerda Barbilian, V.Propopescu, Viorel Gh.Vodă).
- [2] Florentin Smarandache - "Généralisations du théorème de Céva".

## UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE CARNOT

Théorème de Carnot : Soit un point M sur la diagonale AC d'un quadrilatère quelconque ABCD. Par M on trace une droite qui coupe AB en  $\alpha$  et BC en  $\beta$ . Puis on trace une autre droite, qui coupe CD en  $\gamma$  et AD en  $\delta$ . Alors on a :

$$\frac{AB}{B\alpha} \cdot \frac{BC}{C\beta} \cdot \frac{CD}{D\gamma} \cdot \frac{DA}{A\delta} = 1.$$

Généralisation : Soit un polygone  $A_1 \dots A_n$ . Sur une diagonale  $A_1 A_k$  de celui-ci on prend un point M par lequel on trace une droite  $d_1$  qui coupe les droites  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k-1} A_k$  respectivement aux points  $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$ , et une autre droite  $d_2$  qui coupe les autres droites  $A_k A_{k+1}, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$  respectivement aux points  $P_k, \dots, P_{n-1}, P_n$ . Alors on a :

$$\prod_{i=1}^n \frac{A_i P_i}{A_{\varphi(i)} P_i} = 1, \text{ où } \varphi \text{ est la permutation circulaire } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Soit  $1 \leq j \leq k-1$ . On montre facilement que :

$\frac{A_j P_j}{A_{j+1} P_j} = \frac{D(A_j, d_1)}{D(A_{j+1}, d_1)}$  où  $D(A, d)$  représente la distance du point  $A$  à la droite  $d$ , puisque les triangles  $P_j A_j A'_j$  et  $P_j A_{j+1} A'_{j+1}$  sont semblables. (On note  $A'_j$  et  $A'_{j+1}$  les projections des points  $A_j$  et  $A_{j+1}$  sur la droite  $d_1$ .)

Il en résulte que :

$$\frac{A_1 P_1}{A_2 P_1} \cdot \frac{A_2 P_2}{A_3 P_2} \cdots \frac{A_{k-1} P_{k-1}}{A_k P_{k-1}} = \frac{D(A_1, d_1)}{D(A_2, d_1)} \cdot \frac{D(A_2, d_1)}{D(A_3, d_1)} \cdots \frac{D(A_{k-1}, d_1)}{D(A_k, d_1)} = \frac{D(A_1, d_1)}{D(A_k, d_1)}.$$

De manière analogue, pour  $k \leq h \leq n$ , on a :

$$\frac{A_h P_h}{A_{\varphi(h)} P_h} = \frac{D(A_h, d_2)}{D(A_{\varphi(h)}, d_2)} \text{ et } \prod_{h=k}^n \frac{A_h P_h}{A_{\varphi(h)} P_h} = \frac{D(A_k, d_2)}{D(A_1, d_2)}.$$

Le produit du théorème est égal à :

$$\frac{D(A_1, d_1)}{D(A_k, d_1)} \cdot \frac{D(A_k, d_2)}{D(A_1, d_2)}, \text{ mais } \frac{D(A_1, d_1)}{D(A_k, d_1)} = \frac{A_1 M}{A_k M} \text{ puisque les}$$

triangles  $MA_1A'_1$  et  $MA_kA'_k$  sont semblables. De même, puisque les triangles  $MA_1A''_1$  et  $MA_kA''_k$  sont semblables (on note  $A''_1$  et  $A''_k$  les projections respectives de  $A_1$  et  $A_k$  sur la droite  $d_2$ ) , on a :

$$\frac{D(A_k, d_2)}{D(A_1, d_2)} = \frac{A_k M}{A_1 M} .$$

Le produit de l'énoncé est donc bien égal à 1.

Rem : si on remplace n par 4 dans ce théorème, on retrouve le théorème de Carnot.

## QUELQUES PROPRIETES DES MEDIANES

Cet article généralise certains résultats sur les médianes (voir [1] p.97-99). On appelle médianes les segments de droite qui passent par un sommet du triangle et partagent le côté opposé en n parties égales. Une médiane est appelée d'ordre i si elle partage le côté opposé dans le rapport i/n.

Pour  $1 \leq i \leq n-1$ , les médianes d'ordre i (c'est-à-dire  $AA_i, BB_i$  et  $CC_i$ ) ont les propriétés suivantes :

1° Avec ces 3 segments on peut construire un triangle.

$$2^{\circ} |AA_i|^2 + |BB_i|^2 + |CC_i|^2 = \frac{i^2 - i \cdot n + n^2}{n^2} (a^2 + b^2 + c^2)$$

Preuves.

$$\vec{AA}_i = \vec{AB} + \vec{BA}_i = \vec{AB} + \frac{i}{n} \vec{BC} \quad (1)$$

$$\vec{BB}_i = \vec{BC} + \vec{CB}_i = \vec{BC} + \frac{i}{n} \vec{CA} \quad (2)$$

$$\vec{CC}_i = \vec{CA} + \vec{AC}_i = \vec{CA} + \frac{i}{n} \vec{AB} \quad (3)$$

En additionnant ces 3 relations, il vient :

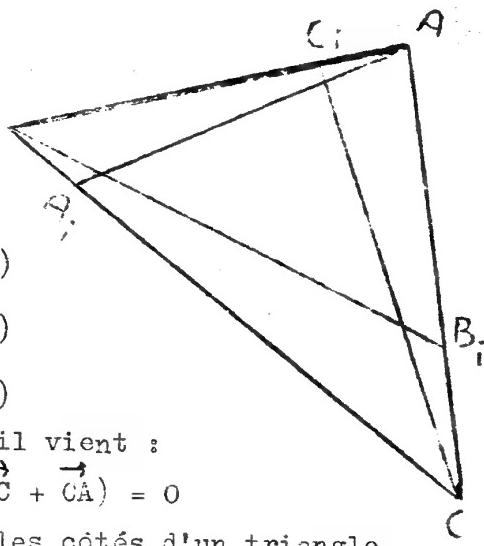
$$\vec{AA}_i + \vec{BB}_i + \vec{CC}_i = \frac{i+n}{n} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = 0$$

donc les 3 médianes peuvent être les côtés d'un triangle.

(2) En éllevant au carré les 3 relations et en faisant la somme on obtient :

$$|AA_i|^2 + |BB_i|^2 + |CC_i|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{i^2}{n^2} (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{i}{n} (2 \vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2 \vec{BC} \cdot \vec{CA} + 2 \vec{CA} \cdot \vec{AB}) \quad (4)$$

Puisque  $2 \vec{AB} \cdot \vec{BC} = -2 ca \cos B = b^2 - c^2 - a^2$  (th. du cosinus), en reportant ceci dans la relation (4) on a la relation cherchée.



## Bibliographie :

- [1] Vodă, Dr. Viorel Gh. - "Surprize în matematica elementară", Editura Albatros, Bucarest, 1981.

## COEFFICIENTS K-NOMIAUX

Dans cet article on élargit les notions de "coefficients binomiaux" et de "coefficients trinomiaux" à la notion de "coefficients k-nomiaux", et on obtient quelques propriétés générales de ceux-ci. Comme application, on généralisera le "triangle de Pascal".

On considère un nombre naturel  $k \geq 2$ ; soit  $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$  le polynôme formé de  $k$  monômes de ce type : on l'appellera " $k$ -nôme". On appelle coefficients  $k$ -nomiaux les coefficients des puissances de  $x$  de  $(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n$ , pour  $n$  entier positif. On les notera  $C_k^n^h$  avec  $h \in \{0, 1, 2, \dots, 2pn\}$ .

Par la suite on va construire par récurrence un triangle de nombres qui va être appelé "triangle des nombres d'ordre k".

CAS 1 :  $k = 2p + 1$ .

Sur la première ligne du triangle on écrit 1 et on l'appelle "ligne 0".

(1) On convient que toutes les cases qui se trouvent à gauche et à droite du premier (respectivement du dernier) nombre de chaque ligne seront considérées comme contenant 0. Les lignes suivantes sont appelées "ligne 1", "ligne 2", etc... Chaque ligne contiendra  $2P$  nombres de plus que la précédente :  $p$  nombres à gauche du premier nombre,  $p$  nombres à droite du dernier nombre de la ligne précédente. Les nombres de la ligne  $i+1$  s'obtiennent à partir de ceux de la ligne  $i$  de la façon suivante :

$C_{i+1}^j$  est égal à l'addition des  $p$  nombres situés à sa gauche sur la ligne  $i$  et des  $p$  nombres situés à sa droite sur la ligne  $i$ , au nombre situé au-dessus de lui (voir fig.1). On va tenir compte de la convention 1.

Fig.1 : ligne i  
ligne i+1

Exemple pour  $k=5$  :

Le nombre  $C5_1^0 = 0+0+0+0+1 = 1$  ;  $C5_1^3 = 0+1+0+0+0 = 1$  ,  
 $C5_2^3 = 0+1+1+1+1 = 4$  ;  $C5_3^7 = 4+5+4+3+2 = 18$  , etc...

Propriétés du triangle de nombres d'ordre k :

1) La ligne i a  $2pi+1$  éléments.

$$2) C_k^h_n = \sum_{i=0}^{2p} C_k^{h-i} \text{ où par convention } C_k^t = 0 \text{ pour } \begin{cases} t < 0 \text{ et} \\ t > 2p \end{cases}$$

Ceci est évident d'après la construction du triangle.

3) Chaque ligne est symétrique par rapport à l'élément central.

4) Les premiers éléments de la ligne i sont 1 et i.

5) La ligne i du triangle de nombres d'ordre k représente les coefficients k-nomiaux de  $(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n$ .

La démonstration se fait par récurrence sur i de  $\mathbb{N}^*$  :

a) Pour  $i=1$  c'est évident; (on fait la propriété serait encore vraie pour  $i=0$ ).

b) Supposons la propriété vraie pour n. Alors

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^{n+1} &= (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n \\ &= (1+x+x^2+\dots+x^{2p}) \cdot \sum_{j=0}^{2pn} C_k^j \cdot x^j = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \sum_{\substack{i+j=t \\ 0 \leq j \leq 2p \\ 0 \leq i \leq 2pn}} C_k^i \cdot x^i \cdot x^j \\ &= \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \left( \sum_{j=0}^{2p} C_k^{t-j} \right) x^t = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} C_k^t \cdot x^t. \end{aligned}$$

6) La somme des éléments situés sur la ligne n est égale à  $k^n$ .

La première méthode de démonstration utilise le raisonnement par récurrence. Pour  $n=1$  l'assertion est évidente. On suppose la propriété vraie pour n, c'est-à-dire que la somme des éléments situés

sur la ligne n est égale à  $k^n$ . La ligne  $n+1$  se calcule à partir des éléments de la ligne n. Chaque élément de la ligne n fait partie de la somme qui calcule chacun des p éléments situés à sa gauche sur la ligne  $n+1$ , chacun des p éléments situés à sa droite sur la ligne  $n+1$  et celui qui est situé en dessous : donc il est utilisé pour calculer k nombres de la ligne  $n+1$ .

Donc la somme des éléments de la ligne  $n+1$  est k fois plus grande que la somme de ceux de la ligne n,

donc elle vaut  $k^{n+1}$ .

7) La différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et la somme des coefficients k-nomiaux de rang impair situés

sur la même ligne  $(C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \dots)$  est égale à 1.

On l'obtient si dans  $(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n$  on prend  $x = -1$ .

$$8) C_k^0 \cdot C_k^h_m + C_k^1 \cdot C_k^{h-1}_m + \dots + C_k^h \cdot C_k^0_m = C_k^h_{n+m}$$

Ceci résulte de ce que, dans l'identité

$$(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^n \cdot (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^m = (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})^{n+m}$$

le coefficient de  $x^h$  dans le membre de gauche est  $\sum_{i=0}^h C_k^i \cdot C_k^{h-i}$   
et celui de  $x^h$  à droite est  $C_k^h$

- 9) La somme des carrés des coefficients k-nomiaux situés sur la ligne n est égale au coefficient k-nomial situé au milieu de la ligne  $2n$ .

Pour la preuve on prend  $n=m=h$  dans la propriété 8.

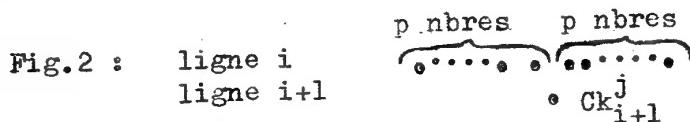
On peut trouver beaucoup de propriétés et applications de ces coefficients k-nomiaux parce qu'ils élargissent les coefficients binomiaux dont les applications sont connues.

CAS 2 :  $k = 2p$ .

La construction du triangle de nombres d'ordre k est analogue : Sur la première ligne on écrit 1 ; on l'appelle ligne 0. Les lignes suivantes sont appelées ligne 1, ligne 2, etc... Chaque ligne aura  $2p-1$  éléments de plus que la précédente ; comme  $2p-1$  est un nombre impair, les éléments de chaque ligne seront placés entre les éléments de la ligne précédente (à la différence du cas 1 où ils se plaçaient en-dessous).

Les éléments situés sur la ligne  $i+1$  s'obtiennent en utilisant ceux de la ligne  $i$  de la façon suivante :

$C_k^j$  est égal à l'addition des  $p$  éléments situés à sa gauche sur la ligne  $i$  aux  $p$  éléments situés à sa droite sur la ligne  $i$ . (Fig.2).



Exemple pour  $k=4$  :

														1
														1
														1
1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1		

D'où la propriété 1' :  $C_k^h = \sum_{i=0}^{2p-1} C_k^{h-i}$

En réunissant les propriétés 1 et 1' :  $C_k^h = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^{h-i}$ .

Les autres propriétés du Cas 1 se conservent dans le cas 2, avec des preuves analogues. Cependant dans la propriété 7, on voit que la différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et celle des coefficients k-nomiaux de rang impair situés sur la même ligne est égale à 0.

## UNE CLASSE D'ENSEMBLES RÉCURSIFS

Dans cet article on construit une classe d'ensembles récursifs, on établit des propriétés de ces ensembles et on propose des applications. Cet article élargit quelques résultats de [1].

### 1) Définitions, propriétés.

On appelle ensembles récursifs les ensembles d'éléments qui se construisent de manière récursive ; soit  $T$  un ensemble d'éléments et  $f_i$  pour  $i$  compris entre 1 et  $s$ , des opérations  $n_i$ -aires, c'est à dire  $f_i : T^{n_i} \rightarrow T$ . Construisons récursivement l'ensemble  $M$  inclus dans  $T$  et tel que :

(déf.1) 1°) certains éléments  $a_1, \dots, a_n$  de  $T$ , appartiennent à  $M$ .

2°) si  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}}$  appartiennent à  $M$ , alors

$f_i(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}})$  appartient à  $M$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

3°) chaque élément de  $M$  s'obtient en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

Nous allons démontrer plusieurs propriétés de ces ensembles  $M$ , qui découlent de la façon dont ils ont été définis.

L'ensemble  $M$  est le représentant d'une classe d'ensembles récursifs parce que dans les règles 1° et 2°, en particularisant les éléments  $a_1, \dots, a_n$ , respectivement  $f_1, \dots, f_s$ , on obtient des ensembles différents.

Observation 1 : Pour obtenir un élément de  $M$ , il faut nécessairement appliquer d'abord la règle 1.

(déf.2) Les éléments de  $M$  s'appellent éléments  $M$ -récursifs.

(déf.3) On appelle ordre d'un élément  $a$  de  $M$  le plus petit naturel  $p \geq 1$  qui a la propriété que  $a$  s'obtient en appliquant  $p$  fois les règles 1° ou 2°.

On note  $M_p$  l'ensemble qui contient tous les éléments d'ordre  $p$  de  $M$ . Il est évident que  $M_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

$$M_2 = \bigcup_{i=1}^s \left\{ \bigcup_{\substack{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}} \in \\ \epsilon M_1}} f_i(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}}) \right\} \setminus M_1$$

On soustrait  $M_1$  car il est possible que  $f_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_{n_j}}) = a_i$  qui appartient à  $M_1$ , et donc pas à  $M_2$ .

On démontre que pour  $k \geq 1$  on a :

$$M_{k+1} = \bigcup_{i=1}^s \left\{ \underbrace{\left( \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}} \right)}_{\in \prod_k^{(i)}} \mid f_i(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}}) \right\} \setminus \bigcup_{h=1}^k M_h$$

où chaque  $\prod_k^{(i)} = \left\{ (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}}) / \alpha_{i_j} \in M_{q_j} \quad j \in \{1, 2, \dots, n_i\} ; \right.$

$\left. 1 \leq q_j \leq k \text{ et au moins un élément } \alpha_{i_j} \in M_k, \quad 1 \leq j \leq n_i \right\} .$

Les ensembles  $M_p$ ,  $p \in N^*$ , forment une partition de l'ensemble  $M$ .

Théorème 1 :  $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p$ , où  $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Preuve. De la règle 1° il résulte que  $M_1 \subseteq M$ .

On suppose que cette propriété est vraie pour des valeurs inférieures à  $p$ . Il en résulte que  $M_p \subseteq M$ , parce que  $M_p$  est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments de  $\bigcup_{i=1}^s M_i$ .

Donc  $\bigcup_{p \in N^*} M_p \subseteq M$ . Réciproquement, on a l'inclusion en sens

contraire en accord avec la règle 3°.

Théorème 2 : L'ensemble  $M$  est le plus petit ensemble qui ait les propriétés 1° et 2°.

Preuve : soit  $R$  le plus petit ensemble ayant les propriétés 1° et 2°. On va démontrer que cet ensemble est unique. Supposons qu'il existe un autre ensemble  $R'$  ayant les propriétés 1° et 2° et qui soit le plus petit. Comme  $R$  est le plus petit ensemble ayant ces propriétés, et puisque  $R'$  les possède aussi, il en résulte que  $R \subseteq R'$ ; de manière analogue, il vient  $R' \subseteq R$ : donc  $R = R'$ .

Il est évident que  $M_1 \subseteq R$ . On suppose que  $M_i \subseteq R$  pour  $1 \leq i < p$ .

Alors (règle 3°), et en tenant compte du fait que chaque élément de  $M_p$  est obtenu en appliquant la règle 2° à certains éléments de  $M_i$ ,  $1 \leq i < p$ , il en résulte que  $M_p \subseteq R$ . Donc

$\bigcup_p M_p \subseteq R$  ( $p \in N^*$ ), c'est à dire  $M \subseteq R$ . Et comme  $R$  est unique,  $M = R$ .

Observation 2. Le théorème 2 remplace la règle 3° de la définition récursive de l'ensemble  $M$  par : "M est le plus petit ensemble satisfaisant les propriétés 1° et 2°".

Théorème 3 :  $M$  est l'intersection de tous les ensembles de  $T$  qui satisfont aux conditions 1° et 2°.

Preuve : soit  $T_{12}$  la famille de tous les ensembles de  $T$  satis-

faisant les conditions 1° et 2°. Soit  $I = \bigcap_{A \in T_{12}} A$ .

I a les propriétés 1° et 2° parce que :

- 1) Pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $a_i \in I$ , parce que  $a_i \in A$  pour tout  $A$  de  $T_{12}$ .

2) Si  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n} \in I$ , il en résulte que  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$  appartiennent à A quel que soit A de  $T_{12}$ . Donc,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$   $f_i(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) \in A$  quel que soit A de  $T_{12}$ , donc  $f_i(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) \in I$  pour tout i de  $\{1, 2, \dots, s\}$ .

Du théorème 2 il résulte que  $M \subseteq I$ .

Puisque M remplit les conditions 1° et 2°, il en résulte que  $M \in T_{12}$ , d'où  $I \subseteq M$ . Donc  $M = I$ .

Déf.) Un ensemble A  $\subseteq I$  est dit fermé pour l'opération  $f_i$ , ssi pour tout  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$  de A, on a :  $f_{i_0}(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$  appartient à A.

(Déf.5) Un ensemble A  $\subseteq T$  est dit fermé M-récuratif ssi :

1)  $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ .

2) A est fermé par rapport aux opérations  $f_1, \dots, f_s$ .

Avec ces définitions, les théorèmes précédents deviennent :

Théorème 2' : L'ensemble M est le plus petit ensemble fermé M-récuratif.

Théorème 3' : M est l'intersection de tous les ensembles fermés M-récuratifs.

(Déf.6) Le système d'éléments  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ ,  $m \geq 1$  et  $\alpha_i \in T$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , constitue une description M-récurative pour l'élément  $\alpha$ , si  $\alpha_m = \alpha$  et que chaque  $\alpha_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) satisfait au moins l'une des propriétés :

1)  $\alpha_i \in \{a_1, \dots, a_n\}$ .

2)  $\alpha_i$  s'obtient à partir des éléments qui le précèdent dans le système en appliquant les fonctions  $f_j$ ,  $1 \leq j \leq s$ , définies par la propriété 2° de (déf.1).

(Déf.7) Le nombre m de ce système s'appelle la longueur de la description M-récurative pour l'élément  $\alpha$ .

Observation 3 : Si l'élément  $\alpha$  admet une description M-récurative, alors il admet une infinité de telles descriptions.

En effet, si  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$  est une description M-récurative de  $\alpha$ , alors  $\underbrace{\langle a_1, \dots, a_1, \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle}_{h \text{ fois}}$  est aussi une description M-récurative pour  $\alpha$ , h pouvant prendre toute valeur de N.

Théorème 4 : L'ensemble M est confondu avec l'ensemble de tous les éléments de T qui admettent une description M-récurative.

Preuve : soit D l'ensemble de tous les éléments qui admettent une description M-récurative. Nous allons démontrer par récurrence que  $M_p \subseteq D$  pour tout p de  $N^*$ .

Pour p = 1 on a :  $M_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ , et les  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,

admettent comme description M-réursive :  $\langle a_j \rangle$ . Ainsi  $M_1 \subseteq D$ . Supposons que la propriété est vraie pour les valeurs inférieures à p.  $M_p$  est obtenu en appliquant la règle 2° aux

éléments de  $\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$ ;  $\alpha \in M_p$  entraîne  $\alpha \in f_i(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in_i})$  et  $\alpha_{ij} \in M_{hj}$  pour  $h_j < p$  et  $1 \leq j \leq n_i$ .

Mais  $\alpha_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ , admet des descriptions M-réursives d'après l'hypothèse de récurrence, soit  $\langle \beta_{j1}, \dots, \beta_{js_j} \rangle$ .

Alors  $\langle \beta_{11}, \dots, \beta_{1s_1}, \beta_{21}, \dots, \beta_{2s_2}, \dots, \beta_{n_i 1}, \dots, \beta_{n_i s_n}, \alpha \rangle$  constitue une description M-réursive pour l'élément  $\alpha$ .  
Donc si  $\alpha$  appartient à D, alors  $M_p \subseteq D$ , c'est à dire  $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p \subseteq D$ .

Réciproquement, soit x appartenant à D. Il admet une description M-réursive  $\langle b_1, \dots, b_t \rangle$  avec  $b_t = x$ . Il en résulte par récurrence sur la longueur de la description M-réursive de l'élément x, que  $x \in M$ . Pour  $t = 1$ , on a  $\langle b_1 \rangle$ ,  $b_1 = x$ , et

$b_1 \in \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$ . On suppose que tous les éléments y de D qui admettent une description M-réursive de longueur inférieure à t appartiennent à M. Soit  $x \in D$ , décrit par un système de longueur t :  $\langle b_1, \dots, b_t \rangle$ ,  $b_t = x$ . Alors  $x \in \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$ , ou bien x est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments qui le précèdent dans le système :  $b_1, \dots, b_{t-1}$ . Mais ces éléments admettent des descriptions M-réursives de longueurs inférieures à t :  $\langle b_1 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle, \dots, \langle b_1, \dots, b_{t-1} \rangle$ . D'après l'hypothèse de récurrence,  $b_1, \dots, b_{t-1}$  appartiennent à M.

Donc  $b_t$  appartient aussi à M. Il en résulte que  $M \equiv D$ .

Théorème 5: Soient  $b_1, \dots, b_q$  des éléments de T qui s'obtiennent à partir des éléments  $a_1, \dots, a_n$  en appliquant un nombre fini de fois les opérations  $f_1, f_2, \dots, f_s$ . Alors M peut être défini récursivement de la façon suivante :

- 1) Certains éléments  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_q$  de T appartiennent à M.
- 2) M est fermé pour les applications  $f_i$ , avec  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ .
- 3) Chaque élément de M est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles (1) ou (2) qui précèdent.

Preuve : évidente. Comme  $b_1, \dots, b_q$  appartiennent à T, et s'ob-

tiennent à partir des éléments  $a_1, \dots, a_n$  de M en appliquant un nombre fini de fois les opérations  $f_i$ , il en résulte que

$b_1, \dots, b_q$  appartiennent à M.

Théorème 6 : Soient  $g_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , des opérations  $n_j$ -aires, c'est à dire  $g_j : T^{n_j} \rightarrow T$ , telles que  $M$  soit fermé par rapport à ces opérations. Alors  $M$  peut être défini récursivement de la façon suivante :

- 1) Certains éléments  $a_1, \dots, a_n$  de  $T$  appartiennent à  $M$ .
- 2)  $M$  est fermé pour les opérations  $f_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$  et  $g_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

3) Chaque élément de  $M$  est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles précédentes.

Preuve facile : comme  $M$  est fermé pour les opérations  $g_j$  (avec  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ ), on a, quels que soient  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}$  de  $M$ ,  $g_j(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}) \in M$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

Les théorèmes 5 et 6 entraînent :

Théorème 7 : L'ensemble  $M$  peut être défini récursivement de la façon suivante :

- 1) Certains éléments  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_q$  de  $T$  appartiennent à  $M$ .
- 2)  $M$  est fermé pour les opérations  $f_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ ) et pour les opérations  $g_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ ) définies précédemment.

3) Chaque élément de  $M$  est défini en appliquant un nombre fini de fois les 2 règles précédentes.

Déf. 8) L'opération  $f_i$  conserve la propriété  $P$  si et seulement si quels que soient les éléments  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}$  ayant la propriété  $P$ ,  $f_i(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n})$  a la propriété  $P$ .

Théorème 8 : Si  $a_1, \dots, a_n$  ont la propriété  $P$ , et si les fonctions  $f_1, \dots, f_s$  conservent cette propriété, alors tous les éléments de  $M$  ont la propriété  $P$ .

Preuve :  $M = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} M_p$ . Les éléments de  $M_1$  ont la propriété  $P$ .

Supposons que les éléments de  $M_i$  pour  $i < p$  ont la propriété  $P$ .

Alors les éléments de  $M_p$  l'ont aussi parce que  $M_p$  s'obtient en appliquant les opérations  $f_1, \dots, f_s$  aux éléments de :

$\bigcup_{i=1}^p M_i$ , éléments qui ont la propriété  $P$ . Donc, quel que soit  $i \in \mathbb{N}$ , les éléments de  $M_i$  ont la propriété  $P$ .

Donc tous les éléments de  $M$  l'ont.

Conséquence 1 : Soit la propriété  $P$  : "x peut être représenté sous la forme  $F(x)$ ".

Si  $a_1, \dots, a_n$  peuvent être représentés sous la forme  $F(a_1), \dots$ , respectivement  $F(a_n)$ , et si  $f_1, \dots, f_s$  conservent la propriété  $P$ , alors tout élément  $\alpha$  de  $M$  peut être représenté sous la forme  $F(\alpha)$ .

Rem : on peut trouver encore d'autres déf. équivalentes de  $M$ .

## 2 - APPLICATIONS , EXEMPLES .

Dans les applications, certaines notions générales comme : élément M-récuratif, description M-récurutive, ensemble fermé M-récuratif seront remplacés par les attributs caractérisant l'ensemble M. Par exemple dans la théorie des fonctions récursives, on trouve des notions comme : fonctions primitives récursives, description primitive récurutive, ensemble fermé primitivement récuratif. Dans ce cas "M" a été remplacé par l'attribut "primitif" qui caractérise cette classe de fonctions, mais il peut être remplacé par les attributs "général", "partiel".

En particularisant les règles 1° et 2° de la déf.1 , on obtient plusieurs ensembles intéressants :

Exemple 1 : (voir [2] , pages 120-122, problème 7.97).

Exemple 2 : L'ensemble des termes d'une suite définie par une relation de récurrence constitue un ensemble récuratif.

Soit la suite :  $a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$  , pour tout n de  $N^*$  , avec  $a_i = a_i^o$  ,  $1 \leq i \leq k$  . On va construire récurativement l'ensemble  $A = \{a_m\}_{m \in N^*}$  et on va définir en même temps la position d'un élément dans l'ensemble A :

1°)  $a_1^o, \dots, a_k^o$  appartiennent à A , et chaque  $a_i^o$  ( $1 \leq i \leq k$ ) occupe la position i dans l'ensemble A ;

2°) si  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1}$  appartiennent à A , et chaque  $a_j$  , pour  $n \leq j \leq n+k-1$  , occupe la position j dans l'ensemble A , alors  $f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$  appartient à A et occupe la position  $n+k$  dans l'ensemble A.

3°) chaque élément de B s'obtient en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

Exemple 3 : Soit  $G = \{e, a^1, a^2, \dots, a^p\}$  un groupe cyclique engendré par l'élément a. Alors  $(G, \cdot)$  peut être défini récurativement de la façon suivante :

1°) a appartient à G.

2°) si b et c appartiennent à G alors b.c appartiennent à G.

3°) chaque élément de G est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1 ou 2.

Exemple 4 : Chaque ensemble fini  $ML = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  peut être défini récurativement (avec  $ML \subseteq T$ ) :

1°) Les éléments  $x_1, \dots, x_n$  de T appartiennent à ML.

2°) Si a appartient à ML , alors  $f(a)$  appartient à ML , où  $f: T \rightarrow T$  telle que  $f(x) = x$  ;

3°) Chaque élément de ML est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

Exemple 5 : Soit L un espace vectoriel sur le corps commutatif K et  $\{x_1, \dots, x_m\}$  une base de L. Alors L peut être défini récurativement de la façon suivante :

- 1°)  $x_1, \dots, x_m$  appartiennent à  $L$  ;  
 2°) si  $x, y$  appartiennent à  $L$  et si  $a$  appartient à  $A$ , alors  
 $x \perp y$  appartient à  $L$  et  $a * x$  appartient à  $L$ .  
 3°) chaque élément de  $L$  est obtenu récursivement en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.  
 (Les lois  $\perp$  et  $*$  sont respectivement les lois interne et externe de l'espace vectoriel  $L$ ).

Exemple 6 : Soient  $X$  un  $A$ -module, et  $M \subset X$  ( $M \neq \emptyset$ ), avec  $M = \{x_i\}_{i \in I}$ . Le sous-module engendré par  $M$  est :  
 $\langle M \rangle = \{x \in X / x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, a_i \in A, x_i \in M, i \in \{1, \dots, n\}\}$

peut être défini récursivement de la façon suivante :

- 1°) pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_i \in \langle M \rangle$  ;  
 2°) si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\langle M \rangle$  et  $a$  appartient à  $A$ , alors  $x + y$  appartient à  $\langle M \rangle$ , et  $ax$  aussi ;  
 3°) chaque élément de  $\langle M \rangle$  est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

En accord avec le paragraphe 1 de cet article,  $\langle M \rangle$  est le plus petit sous-ensemble de  $X$  vérifiant les conditions 1° et 2°, c'est-à-dire que  $\langle M \rangle$  est le plus petit sous-module de  $X$  incluant  $M$ .  $\langle M \rangle$  est aussi l'intersection de tous les sous-ensembles de  $X$  vérifiant les conditions 1° et 2°, c'est-à-dire que  $\langle M \rangle$  est l'intersection de tous les sous-modules de  $X$  qui contiennent  $M$ . On retrouve ainsi directement quelques résultats classiques d'algèbre.  
 On peut aussi parler de sous-groupes ou d'idéal engendré par un ensemble : on obtient ainsi quelques applications importantes en algèbre.

Exemple 7 : On obtient aussi comme application la théorie des langages formels, parce que, comme on le sait, chaque langage régulier (linéaire à droite) est un ensemble régulier et réciproquement. Mais un ensemble régulier sur un alphabet  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$  peut

être défini récursivement de la façon suivante :

- 1°)  $\emptyset, \{\epsilon\}, \{a_1\}, \dots, \{a_n\}$  appartiennent à  $R$ .  
 2°) si  $P$  et  $Q$  appartiennent à  $R$ , alors  $P \cup Q$ ,  $PQ$ , et  $P^*$  app. à  $R$ , avec  $P \cup Q = \{x / x \in P \text{ ou } x \in Q\}$ ;  $PQ = \{xy / x \in P \text{ et } y \in Q\}$ , et  
 $P^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n$  avec  $P^n = \underbrace{P.P.\dots.P}_{n \text{ fois}}$  et, par convention,  $P^0 = \{\epsilon\}$ .

3°) Rien d'autre n'appartient à  $R$  que ce qui est obtenu à l'aide de 1° ou de 2°.

D'où plusieurs propriétés de cette classe de langages avec applications aux langages de programmation.

#### Bibliographie:

- [1] C.P.Popovici, L.Livovschi, H.Georgescu, N.Tăndăreanu - "Curs de bazele informaticii (funcții booleene și circuite combinaționale)", Tipografia Universității din Bucarest, 1976.
- [2] F.Smarandache - "Problèmes avec et sans... problèmes !" - Somipress, Fès (Maroc), 1983.

## SUR QUELQUES PROGRESSIONS

Dans cet article on construit des ensembles qui ont la propriété suivante : quel que soit leur partage en deux sous-ensembles, au moins l'un de ces sous-ensembles contient au moins trois éléments en progression arithmétique (ou bien géométrique).

Lemme 1 : L'ensemble des nombres naturels ne peut pas être partagé en deux sous-ensembles ne contenant ni l'un ni l'autre 3 nombres en progression arithmétique.

Supposons le contraire, et soient  $M_1$  et  $M_2$  les deux sous-ensembles. Soit  $k \in M_1$ .

a) Si  $k+1 \in M_1$ , alors  $k-1$  et  $k+2$  sont dans  $M_2$ , sinon on pourrait construire une progression arithmétique dans  $M_1$ . Pour la même raison, puisque  $k-1$  et  $k+2$  sont dans  $M_2$ , alors  $k-4$  et  $k+5$  sont dans  $M_1$ . Donc :

•  $k+1$  et  $k+5$  sont dans  $M_1$  donc  $k+3$  est dans  $M_2$  ;  
 •  $k-4$  et  $k$  sont dans  $M_1$  donc  $k+4$  est dans  $M_2$  ;

on a obtenu que  $M_2$  contient  $k+2$ ,  $k+3$  et  $k+4$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) si  $k+1 \notin M_1$  alors  $k+1 \in M_2$ . Analysons l'élément  $k-1$ .

Si  $k-1 \in M_1$ , on est dans le cas (a) où deux éléments consécutifs appartiennent au même ensemble.

Si  $k-1 \in M_2$ . Alors, puisque  $k-1$  et  $k+1$  sont dans  $M_2$ , il en résulte que  $k-3$  et  $k+3 \notin M_2$ , donc  $\in M_1$ . Mais on obtient la progression arithmétique  $k-3$ ,  $k$ ,  $k+3$  dans  $M_1$ , contradiction.

Lemme 2 : Si on met à part un nombre fini de termes de l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble obtenu garde encore la propriété du lemme 1.

Dans le lemme 1, le choix de  $k$  était arbitraire, et pour chaque  $k$  on obtenait, au moins dans l'un des ensembles  $M_1$  ou  $M_2$ , un triplet d'éléments en progression arithmétique : donc au moins un de ces deux ensembles contient une infinité de tels triplets.

Si on met à part un nombre fini de naturels, on met aussi à part un nombre fini de triplets en progression arithmétique. Mais l'un au moins des deux ensembles  $M_1$  ou  $M_2$  conservera un nombre infini de triplets en progression arithmétique.

Lemme 3 : Si  $i_1, \dots, i_s$  sont des naturels en progression arithmétique, et si  $a_1, a_2, \dots$  est une progression arithmétique (respectivement géométrique), alors  $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$  est aussi une progression arithmétique (respectivement géométrique).

Démonstration : pour chaque  $j$  on a :  $2a_j = a_{j-1} + a_{j+1}$ .

a) Si  $a_1, a_2, \dots$  est une progression arithmétique de raison  $r$ :

$$\begin{aligned} 2a_j &= 2(a_1 + (i_j - 1)r) = (a_1 + (i_{j-1} - 1)r) + (a_1 + (i_{j+1} - 1)r) \\ &= a_{i_{j-1}} + a_{i_{j+1}}. \end{aligned}$$

b) Si  $a_1, a_2, \dots$  est une progression géométrique de raison  $r$ :

$$\begin{aligned} (a_{i_j})^2 &= (a \cdot r^{i_j-1})^2 = a^2 \cdot r^{2i_j-2} = (a \cdot r^{i_{j-1}-1}) \cdot (a \cdot r^{i_{j+1}-1}) \\ &= a_{i_{j-1}} \cdot a_{i_{j+1}}. \end{aligned}$$

Théorème 1 : N'importe la manière dont on partage l'ensemble des termes d'une progression arithmétique (respectivement géométrique) en 2 sous-ensembles : dans l'un au moins de ces sous-ensembles il y aura au moins 3 termes en progression arithmétique (respectivement géométrique).

Démonstration : D'après le lemme 3, il suffit d'étudier le partage de l'ensemble des indices des termes de la progression en 2 sous-ensembles, et d'analyser l'existence (ou non) d'au moins 3 indices en progression arithmétique dans l'un de ces sous-ensembles.

Mais l'ensemble des indices des termes de la progression est l'ensemble des nombres naturels, et on a démontré au lemme 1 qu'il ne peut pas être partagé en 2 sous-ensembles sans qu'il y ait au moins 3 nombres en progression arithmétique dans l'un de ces sous-ensembles : le théorème est démontré.

Théorème 2 : Un ensemble  $M$  qui contient une progression arithmétique (respectivement géométrique) infinie, non constante, conserve la propriété du théorème 1.

En effet, cela découle directement du fait que tout partage de  $M$  implique le partage des termes de la progression.

Application : quelle que soit la façon dont on partage l'ensemble  $A = \{1^m, 2^m, 3^m, \dots\}$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) en 2 sous-ensembles, au moins l'un de ces sous-ensembles contient 3 termes en progression géométrique.

(Généralisation du problème 0:255 de la "Gazeta Matematica", Bucarest, n°10/1981, p.400).

La solution résulte naturellement du théorème 2, si on remarque que  $A$  contient la progression géom.  $a_n = (2^m)^n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

De plus on peut démontrer que dans l'un au moins des sous-ensembles il y a une infinité de triplets en progression géométrique, parce que  $A$  contient une infinité de progressions géométriques différentes :  $a_n^{(p)} = (p^m)^n$  avec  $p$  premier et  $n \in \mathbb{N}^*$ , auxquelles on peut appliquer les théorèmes 1 et 2.

SUR LA RESOLUTION DANS L'ENSEMBLE DES NATURELS  
DES EQUATIONS LINEAIRES

L'utilité de cet article est qu'il établit si le nombre des solutions naturelles d'une équation linéaire est limité ou non. On expose aussi une méthode de résolution en nombres entiers de l'équation  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$  (qui représente une généralisation des lemmes 1 et 2 de [4]), un exemple de résolution d'équation à 3 inconnues, et quelques considérations sur la résolution en nombres entiers naturels des équations à  $n$  inconnues.

Soit l'équation :

$$(1) \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \quad \text{avec tous les } a_i, b \text{ dans } \mathbb{Z}, a_i \neq 0, \text{ et } (a_1, \dots, a_n) = d.$$

Lemme 1 : L'équation (1) admet au moins une solution dans l'ensemble des entiers, si  $d$  divise  $b$ .

Ce résultat est classique.

Dans (1), on ne nuit pas à la généralité en prenant  $(a_1, \dots, a_n) = 1$ , parce que dans le cas où  $d \neq 1$  on divise l'équation par ce nombre ; si la division n'est pas entière, alors l'équation n'admet pas de solutions naturelles.

Il est évident que chaque équation linéaire homogène admet des solutions dans  $\mathbb{N}$  : au moins la solution banale !

PROPRIETES SUR LE NOMBRE DE SOLUTIONS NATURELLES D'UNE  
EQUATION LINEAIRE GENERALE.

On va introduire la notion suivante :

Déf.1 : L'équation (1) a des variations de signe s'il y a au moins deux coefficients  $a_i, a_j$  avec  $1 \leq i, j \leq n$ , tels que  $a_i \cdot a_j < 0$ .

Lemme 2 : Une équation (1) qui a des variations de signe admet une infinité de solutions naturelles (généralisation du lemme 1 de [4]).

Preuve : De l'hypothèse du lemme résulte que l'équation a  $h$  termes positifs non nuls,  $1 \leq h \leq n$ , et  $k = n-h$  termes négatifs non nuls. On a  $1 \leq k \leq n$ . On suppose que les  $h$  premiers termes sont positifs et les  $k$  suivants négatifs.

On peut alors écrire :

$$\sum_{t=1}^h a_t x_t - \sum_{j=h+1}^n a'_j x_j = b \quad \text{où } a'_j = -a_j > 0.$$

Soit  $0 < M = [a_1, \dots, a_n]$  et  $c_i = \left\lfloor \frac{M}{a_i} \right\rfloor$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Soit aussi  $0 < P = [h, k]$ , et  $h_1 = P/h$  et  $k_1 = P/k$ .

Prenant  $\begin{cases} x_t = h_1 c_t \cdot z + x_t^0, & 1 \leq t \leq h, \\ x_j = k_1 c_j \cdot z + x_j^0, & h+1 \leq j \leq n, \end{cases}$

où  $z \in \mathbb{N}$ ,  $z \geq \max_{t,j} \left\{ \left\lfloor \frac{-x_t^0}{h_1 c_t} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{x_j^0}{k_1 c_j} \right\rfloor \right\} + 1$ ,

et  $x_i^0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  une solution particulière entière (qui existe d'après le lemme 1), on obtient une infinité de solutions dans l'ensemble des naturels pour l'équation (1).

Lemme 3 : a) Une équation (1) qui n'a pas de variation de signe a au maximum un nombre limité de solutions naturelles.  
b) Dans ce cas, pour  $b \neq 0$ , constant, l'équation a le nombre maximum de solutions si et seulement si  $a_i = 1$  pour  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Preuve (voir aussi [6]).

a) On considère tous les  $a_i > 0$  (dans le cas contraire, multiplier l'équation par -1).

Si  $b < 0$ , il est évident que l'équation n'a aucune solution (dans  $\mathbb{N}$ ).

Si  $b = 0$ , l'équation admet seulement la solution banale.

Si  $b > 0$ , alors chaque inconnue  $x_i$  prend des valeurs entières positives comprises entre 0 et  $b/a_i = d_i$  (fini), et pas nécessairement toutes ces valeurs. Donc le nombre maximum de solutions est inférieur ou égal à :

$$\prod_{i=1}^n (1+d_i) \text{ qui est fini.}$$

b) Pour  $b \neq 0$ , constant,  $\prod_{i=1}^n (1+d_i)$  est maximum ssi les  $d_i$

sont maximums, c'est à dire ssi  $a_i = 1$  pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Théorème 1 : L'équation (1) admet une infinité de solutions naturelles si et seulement si elle a des variations de signe.

Ceci résulte naturellement de ce qui précède.

#### Méthode de résolution.

Théorème 2 : Soit l'équation à coefficients entiers  $ax - by = c$ , où  $a$  et  $b > 0$  et  $(a, b) = 1$ . Alors la solution générale en nombres naturels de cette équation est :

$$\begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases} \text{ où } (x_0, y_0) \text{ est une solution particulière entière de l'équation, et } k \geq \max \left\{ \left[ -x_0/b \right], \left[ -y_0/a \right] \right\} + 1 \text{ est un paramètre entier (généralisation du lemme 2 de [4])}.$$

Preuve. Il résulte de [1] que la solution générale entière de l'équation est  $\begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases}$  où  $(x_0, y_0)$  est une solution particulière entière de l'équation et  $k \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels, il nous faut imposer des conditions à  $k$ , d'où la suite du théorème.

SYSTEMATISONS ! Pour résoudre dans l'ensemble des naturels une équation linéaire à  $n$  inconnues on utilise les résultats antérieurs de la façon suivante ;

a) Si l'équation n'a pas de variation de signe, comme elle a un nombre limité de solutions naturelles, la résolution est faite par épreuves (voir aussi [6]).

b) Si elle a des variations de signe et que  $b$  divisible par  $d$ , alors elle admet une infinité de solutions naturelles. On détermine

d'abord sa solution générale entière (voir [2], [5] ):

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} k_j + \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n, \text{ où tous les } \alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{Z}$$

et les  $k_j$  sont des paramètres entiers.

En appliquant la restriction  $x_i \geq 0$  pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

on détermine les conditions qui doivent être réalisées par les paramètres entiers  $k_j$  pour tout  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ . (c)

Le cas  $n = 2$  et  $n = 3$  peut être traité par cette méthode, mais quand  $n$  augmente, les conditions (c) deviennent de plus en plus difficiles à trouver.

Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $3x - 7y + 2z = -18$ .

Sol. : dans  $\mathbb{Z}$  on obtient la solution générale entière :

$$\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1 + 2k_2 & \text{avec } k_1, k_2 \text{ dans } \mathbb{Z} \\ z = 2k_1 + 7k_2 - 9 \end{cases}$$

Les conditions (c) résultent des inégalités  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ . Il en résulte  $k_1 \geq 0$ , et aussi  $k_2 \geq \lceil -k_1/2 \rceil + 1$  et  $k_2 \geq \lceil (9-2k_1)/7 \rceil + 1$ , c'est-à-dire  $k_2 \geq \lceil (2-2k_1)/7 \rceil + 2$ .

Avec ces conditions sur  $k_1$  et  $k_2$ , on a la solution générale en nombres naturels de l'équation.

#### BIBLIOGRAPHIE :

- [1] Creangă L., Cazacu C., Mihut P., Opait Gh., Reisher, Corina - "Introducere în teoria numerelor", Editura didactică și pedagogică, Bucarest, 1965.
- [2] Ion D., Ion, Niță C. - "Elemente de aritmetică cu aplicații în tehnici de calcul", Editura tehnică, Bucarest, 1978.
- [3] Popovici C.P. - "Logica și teoria numerelor", Editura didactică și pedagogică, Bucarest, 1970.
- [4] Andrica, Dorin și Andreescu, Titu - "Existența unei soluții de bază pentru ecuația  $ax^2 - by^2 = 1$ ", Gazeta Matematică, nr. 2/1981.
- [5] Smarandache, Florentin Gh. - "Un algorithme de résolution de l'ensemble des nombres entiers des équations linéaires", Analele Universității din Craiova, 1981.
- [6] Smarandache, Florentin Gh. - Problema E : 6919, G.M 7/1980.

SUR LA RESOLUTION D'EQUATIONS DU SECOND DEGRE  
A DEUX INCONNUES DANS Z

Propriété 1 : L'équation  $x^2 - y^2 = c$  admet des solutions entières si et seulement si  $c$  appartient à  $4\mathbb{Z}$  ou est impair.

Preuve : l'équation  $(x-y)(x+y) = c$  admet des solutions dans  $\mathbb{Z}$  ssi il existe  $c_1$  et  $c_2$  de  $\mathbb{Z}$  tels que  $x-y = c_1$ ,  $x+y = c_2$ , et  $c_1 c_2 = c$ . D'où  $x = \frac{c_1 + c_2}{2}$  et  $y = \frac{c_2 - c_1}{2}$ . Mais  $x$  et  $y$  sont des entiers ssi  $c_1 + c_2 \in 2\mathbb{Z}$ ,  $c_2 - c_1 \in 2\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire :

- 1) ou bien  $c_1$  et  $c_2$  sont impairs, d'où  $c$  impair (et réciproquement).
- 2) ou bien  $c_1$  et  $c_2$  sont pairs, d'où  $c \in 4\mathbb{Z}$ . Réciproquement, si  $c \in 4\mathbb{Z}$ , alors on peut décomposer  $c$  en deux facteurs  $c_1$  et  $c_2$  pairs, et tels que  $c_1 c_2 = c$ .

Remarque 1 :

La propriété 1 est vraie aussi pour la résolution dans  $\mathbb{N}$ , puisqu'on peut supposer  $c > 0$  (dans le cas contraire, on multiplie l'équation par  $(-1)$ ), et on prend  $c_2 \geq c_1 \geq 0$ , d'où  $x > 0$  et  $y > 0$ .

Propriété 2 : L'équation  $x^2 - dy^2 = c^2$  (où  $d$  n'est pas un carré parfait), admet une infinité de solutions dans  $\mathbb{N}$ .

Preuve : soient  $x = ck_1$ ,  $k_1 \in \mathbb{N}$  et  $y = ck_2$ ,  $k_2 \in \mathbb{N}$ ,  $c \in \mathbb{N}$ .

Il en résulte que  $k_1^2 - dk_2^2 = 1$ , où l'on reconnaît l'équation de Pell-Fermat, qui admet une infinité de solutions dans  $\mathbb{N}$ ,  $(u_n, v_n)$ . Alors  $x_n = cu_n$ ,  $y_n = cv_n$  constituent une infinité de solutions naturelles de notre équation.

Propriété 3 : L'équation  $ax^2 - by^2 = c$  ( $\neq 0$ ), où  $ab = k^2$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), admet un nombre fini de solutions naturelles.

Preuve : on peut considérer  $a, b, c$  comme des nombres positifs : dans le cas contraire, on multiplie éventuellement l'équation par  $(-1)$  et on change le nom des variables. Multiplions l'équation par  $a$ , on aura :

$$z^2 - t^2 = d \text{ avec } z = ax \in \mathbb{N}, t = ky \in \mathbb{N} \text{ et } d = ac > 0. \quad (1)$$

On résout comme dans la propriété 1, ce qui donne  $z$  et  $t$ . Mais dans (1) on a un nombre fini de solutions naturelles, parce qu'il existe un nombre fini de diviseurs entiers pour un nombre de  $\mathbb{N}^*$ . Comme les couples  $(z, t)$  sont en nombre limité, bien sûr les couples  $(z/a, t/k)$  aussi, ainsi que les couples  $(x, y)$ .

Propriété 4 : Si  $ax^2 - by^2 = c$ , où  $ab \neq k^2$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), admet une solution particulière non triviale dans  $\mathbb{N}$ , alors elle admet une infinité de solutions dans  $\mathbb{N}$ .

Preuve : on pose : (2)  $\begin{cases} x_n = x_0 u_n + b y_0 v_n \\ y_n = y_0 u_n + a x_0 v_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

où  $(x_0, y_0)$  est la solution particulière naturelle pour l'équation initiale, et  $(u_n, v_n)$  est la solution générale naturelle pour l'équation :  $u_n^2 - abv_n^2 = 1$ , nommée la résolvante Pell, qui admet une infinité de solutions.

Alors  $ax_n^2 - by_n^2 = (ax_0^2 - by_0^2)(u_n^2 - abv_n^2) = c$ .

Donc (2) vérifie l'équation initiale.

## CONVERGENCE D'UNE FAMILLE DE SERIES

Dans cet article, on construit une famille d'expressions  $\mathcal{E}(n)$ .

Pour chaque élément  $E(n)$  de  $\mathcal{E}(n)$ , la convergence de la séries  $\sum_{n \in E} E(n)$  pourra être décidée d'après les théorèmes de l'article. L'article donne aussi des applications.

### (1) Préliminaire .

Pour rendre l'expression plus aisée, nous utiliserons les fonctions récursives. Quelques notations et notions seront introduites pour simplifier et réduire la matière de cet article.

### (2) Définitions ; lemmes.

Nous construisons récursivement une famille d'expressions  $\mathcal{E}(n)$ . Pour chaque expression  $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ , le degré de l'expression est défini récursivement et noté  $d^o E(n)$ , et son coefficient dominant est noté  $c(E(n))$ .

1. Si  $a$  est une constante réelle, alors  $a \in \mathcal{E}(n)$ .  
 $d^o a = 0$  et  $c(a) = a$ .
2. L'entier positif  $n \in \mathcal{E}(n)$ .  
 $d^o n = 1$  et  $c(n) = 1$ .
3. Si  $E_1(n)$  et  $E_2(n)$  appartiennent à  $\mathcal{E}(n)$ , avec  $d^o E_1(n) = r_1$  et  $d^o E_2(n) = r_2$ ,  $c(E_1(n)) = a_1$  et  $c(E_2(n)) = a_2$ , alors :
  - a)  $E_1(n)E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$  ;  $d^o(E_1(n)E_2(n)) = r_1 + r_2$  ;  $c(E_1(n)E_2(n))$  vaut  $a_1 a_2$ .
  - b) si  $E_2(n) \neq 0 \quad \forall n \in N (n > n_{E_2})$ , alors  $\frac{E_1(n)}{E_2(n)} \in \mathcal{E}(n)$  et  $d^o\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = r_1 - r_2$ ,  $c\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = \frac{a_1}{a_2}$ .
  - c) Si :  $\alpha$  est un réel constant et si l'opération utilisée a un sens ( $E_1(n))^\alpha$  (pr. tt.  $n \in N$ ,  $n > n_{E_1}$ ), alors  $(E_1(n))^\alpha \in \mathcal{E}(n)$ ,  $d^o((E_1(n))^\alpha) = r_1 \alpha$ ,  $c((E_1(n))^\alpha) = a_1^\alpha$ .
  - d) Si  $r_1 \neq r_2$ , alors  $E_1(n) \pm E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$ ,  $d^o(E_1(n) \pm E_2(n))$  est le max de  $r_1$  et  $r_2$ , et  $c(E_1(n) \pm E_2(n)) = a_1$ , respectivement  $a_2$ , suivant que le degré est  $r_1$  ou  $r_2$ .
  - e) si  $r_1 = r_2$  et  $a_1 + a_2 \neq 0$ , alors  $E_1(n) + E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$ ,  $d^o(E_1(n) + E_2(n)) = r_1$  et  $c(E_1(n) + E_2(n)) = a_1 + a_2$ .
  - f) Si  $r_1 = r_2$  et  $a_1 - a_2 \neq 0$ , alors  $E_1(n) - E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$ ,  $d^o(E_1(n) - E_2(n)) = r_1$  et  $c(E_1(n) - E_2(n)) = a_1 - a_2$ .

4. Toute expression obtenue par application un nombre fini de fois du pas 3 appartient à  $\mathcal{E}(n)$ .

Note 1. De la définition de  $\mathcal{E}(n)$  il résulte que, si  $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ , alors  $c(E(n)) \neq 0$  et que  $c(E(n)) = 0$  si et seulement si  $E(n) \equiv 0$ .

Lemme 1. Si  $E(n) \in \mathcal{E}(n)$  et  $c(E(n)) > 0$ , alors il existe  $n' \in N$ , tel que pour tout  $n > n'$ ,  $E(n) > 0$ .

Preuve : soit  $c(E(n)) = a_1 > 0$  et  $d^o(E(n)) = r$ .

$$\text{Si } r > 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} E(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^r \frac{E(n)}{n^r} =$$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 n^r = +\infty$ , donc il existe  $n' \in N$  tel que, qst  $n > n'$

on ait  $E(n) > 0$ .

$$\text{Si } r < 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-r}}{\frac{E(n)}{n^r}} = \frac{1}{a_1} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-r} = +\infty$$

donc il existe  $n' \in N$ , tel que pour tout  $n > n'$ ,  $\frac{1}{E(n)} > 0$ ,

ou encore  $E(n) > 0$ .

Si  $r = 0$ , alors ou bien  $E(n)$  est une constante réelle positive,

$$\text{ou bien } \frac{E_1(n)}{E_2(n)} = E(n), \text{ avec } d^o E_1(n) = d^o E_2(n) = r_1 \neq 0, \text{ et}$$

$$\text{d'après ce que nous venons de voir, } c\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = \frac{c(E_1(n))}{c(E_2(n))} = \\ = c(E(n)) > 0. \text{ Alors :}$$

\* ou bien  $c(E_1(n)) > 0$  et  $c(E_2(n)) > 0$  : il en résulte

il existe  $n_{E1} \in N$ ,  $\forall n \in N$  et  $n > n_{E1}$ ,  $E_1(n) > 0$  }  $\Rightarrow$

il existe  $n_{E2} \in N$ ,  $\forall n \in N$  et  $n > n_{E2}$ ,  $E_2(n) > 0$

$$\text{il existe } n_E = \max(n_{E1}, n_{E2}) \in N, \forall n \in N, n > n_E, E(n) \frac{E_1(n)}{E_2(n)} > 0.$$

\* ou bien  $c(E_1(n)) < 0$  et  $c(E_2(n)) < 0$  et alors :

$$E(n) = \frac{E_1(n)}{E_2(n)} = \frac{-E_1(n)}{-E_2(n)}, \text{ ce qui nous ramène au cas précédent.}$$

Lemme 2. Si  $E(n) \in \mathcal{E}(n)$  et  $c(E(n)) < 0$ , alors il existe  $n' \in N$ , tel que qst  $n > n'$ ,  $E(n) < 0$ .

Preuve : l'expression  $-E(n)$  a la propriété que  $c(-E(n)) > 0$ ,

d'après la définition récursive. D'après le lemme 1 :

il existe  $n' \in N$ ,  $\forall n \in N$ ,  $n > n'$ ,  $-E(n) > 0$ , c'est-à-dire  $+E(n) < 0$ , cqfd.

Note 2. Pour prouver le théorème suivant, nous supposons connu le critère de convergence des séries et certaines propriétés de ces dernières.

### (3) Théorème de convergence et applications.

Théorème 1 soit  $E(n) \in \mathcal{E}(n)$  avec  $d^o E(n) = r$  et soit les séries

$$\sum_{n > n_E} E(n), E(n) \neq 0. \text{ Alors :}$$

A) si  $r < -1$  la série est absolument convergente.  
 B) si  $r \geq -1$  elle est divergente où  $E(n)$  a un sens  $\forall n \geq n_E$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Preuve : d'après les lemmes 1 et 2, et parce que :  
 la série  $\sum_{n \geq n_E} E(n)$  converge  $\Leftrightarrow$  la série  $-\sum_{n \geq n_E} E(n)$  converge,  
 nous pouvons considérer la série  $\sum_{n \geq n_E} E(n)$  comme une série à termes positifs. Nous allons prouver que la série  $\sum_{n \geq n_E} E(n)$  a la même nature que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{-r}}$ . Appliquons le second critère de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n)}{\frac{1}{n^{-r}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(n)}{\frac{1}{n^r}} = c(E(n)) \neq \pm \infty. \text{ D'après la note 1}$$

si  $E(n) \neq 0$  alors  $c(E(n)) \neq 0$  et donc la série  $\sum_{n \geq n_E} E(n)$  a la même nature que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{-r}}$ , c'est-à-dire :

- A) si  $r < -1$ , alors la série est convergente ;  
 B) si  $r \geq -1$ , alors la série est divergente.

Pour  $r < -1$ , la série est absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

Applications : On peut en trouver beaucoup. En voici quelques-unes intéressantes :

Si  $P_q(n)$ ,  $R_s(n)$  sont des polynômes en  $n$  de degré  $q, s$ , et que  $P_q(n)$  et  $R_s(n)$  appartiennent à  $\mathcal{E}(n)$  :

$$1^\circ) \sum_{n \geq n_{PR}} \frac{k \sqrt[q]{P_q(n)}}{h \sqrt[s]{R_s(n)}} \text{ est } \begin{cases} \text{convergent, si } s/h - q/k > 1 \\ \text{divergent, si } s/h - q/k \leq 1 \end{cases}.$$

$$2^\circ) \sum_{n \geq n_R} \frac{1}{R_s(n)} \text{ est } \begin{cases} \text{convergent, si } s > 1 \\ \text{divergent, si } s \leq 1 \end{cases}.$$

Exemple : la série  $\sum_{n=2} \frac{\sqrt[2]{n+1} \cdot \sqrt[3]{n-7} + 2}{\sqrt[5]{n^2}} - 17$  est divergente parce que

$\frac{2}{5} - (1/2 + 1/3) < 1$ , et si on appelle  $E(n)$  chaque quotient de cette série,  $E(n)$  appartient à  $\mathcal{E}(n)$  et à un sens pour  $n \geq 2$ .

## DES FANTAISIES MATHÉMATIQUES.

Trouvez une "logique" aux énoncés suivants :

- (1)  $4 - 5 \approx 5$  !
- (2) 8 divisé par deux est égal à zéro !
- (3) 10 moins 1 égale 0. !
- (4)  $\int f(x) dx = f(x)$  !
- (5)  $8 + 8 = 8$  !

Solutions :

Ces fantaisies mathématiques sont des divertissements, des problèmes amusants : elles font abstraction de la logique courante, mais elles ont quand même leur "logique", une logique fantaisiste : ainsi

- (1) s'explique si l'on ne considère pas "4 - 5" comme l'écriture de "4 moins 5" mais comme celle de "de 4 à 5" ; d'où une lecture de l'énoncé " $4-5 \approx 5$ " : "entre 4 et 5, mais plus près de 5".
- (2) 8 peut être divisé par deux... de la façon suivante :  $\frac{8}{2}$ , c'est-à-dire qu'il sera coupé en deux parties égales, qui sont égales à "0" au-dessus et au-dessous de la barre !
- (3) "10 moins 1" peut s'entendre comme : les deux caractères typographiques 1,0 moins le 1, ce qui justifie qu'il reste le caractère 0.
- (4) Le signe  $\int$  sera considéré comme la fonction inverse de l'intégrale.
- (5) L'opération " $\infty + \infty = \infty$ " est vraie : on va l'écrire verticalement : 
$$\begin{array}{r} + \\ \infty \\ \hline \infty \end{array}$$

ce qui, transposé horizontalement (par une rotation mécanique des signes graphiques), donnera bien l'énoncé : " $8 + 8 = 8$ ".

LA FREQUENCE DES LETTRES ( PAR GROUPES EGAUX )  
DANS LES TEXTES JURIDIQUES ROUMAINS

Analysant le degré de détérioration des touches d'une machine à écrire qui a fonctionné plus de 40 ans au greffe d'un tribunal d'un district roumain (Vilcea), on les a réparties dans les groupes suivants :

- 1) Lettres complètement détériorées (on ne peut plus rien lire sur la touche).
- 2) Lettres dont on voit un seul point, à peine perceptible.
- .....
- 10) Lettres dont il manque un seul point.
- 11) Lettres qui se voient parfaitement, sans aucun manque.
- 12) Lettres qui, n'étant presque pas utilisées, étaient couvertes de poussière.

On a obtenu les résultats suivants :

1) E, A	7) O,C,U,D,Z
2) I	8) N
3) R	9) L
4) T	10) V,M
5) S	11) F,G,B,H,X,J,K
6) P	12) W,Q,Y

Cette classification est un peu différente de celle de [1], parce que les lettres A, Å, Ä sont ici cumulées en une seule lettre : A, de même I et ï dans I, S et ſ dans S, T et ð dans T.  
En étudiant l'écart de ces textes (cf. [2]), on obtient :

$$\mathcal{L}(j) = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} | \mathcal{L}(A_i) | \approx 2,348,$$

donc l'écart du langage juridique des fréquences courantes de la langue est beaucoup plus grand que celui du langage des mots croisés :  $\mathcal{L}(g) \approx 1,391$  et  $\mathcal{L}(d_r) \approx 1,185$ .

Les sauts les plus spectaculaires sont réalisés par les lettres P, Z et N :

$$\mathcal{L}(P) = 6, \quad \mathcal{L}(Z) = 7, \quad \mathcal{L}(N) = -8.$$

Cet article surprend peut-être par sa banalité. Mais, alors que les autres auteurs ont fait des mois de calculs à l'aide d'ordinateurs, choisissant certains livres et faisant compter les lettres (!) par l'ordinateur, moi j'ai déduit cette fréquence des lettres en quelques minutes (!), par une simple observation.

#### Bibliographie:

- [1] Marcus, Solomon - "Poetica matematică", Editura Academiei, Bucarest, 1970 (traduit en allemand, Athenäum, Frankfurt, 1973).
- [2] Smarandache, Florentin - "A mathematical linguistic approach to Rebus", article publié dans la revue "Revue Roumaine de linguistique", Tome XXVIII, 1983, la collection "Cahiers de linguistique théorique et appliquée", Tome XX, 1983, n°1, p. 57-76, Bucarest.

HYPOTHESES SUR LA DETERMINATION D'UNE REGLE  
POUR LES JEUX DE MOTS CROISES

Les problèmes de mots croisés sont composés, on le sait, de grilles et de définitions. Dans la langue roumaine on impose la condition que le pourcentage de cases noires par rapport au nombre total de cases de la grille ne dépasse pas 15 %.

Pourquoi 15 %, et pas plus ou moins ? C'est la question à laquelle cet article tente de répondre. (Cette question est due au Professeur Solomon MARCUS - symposium national de Mathématiques "Traian Lalesco", Université de Craiova, 10 juin 82).

Voici tout d'abord un tableau qui présente de manière synthétique une statistique sur les grilles contenant un très faible pourcentage de cases noires (cf. [2], pages 27-29) :

LES GRILLES-RECORDS:

Dimension de la grille	Nombre minimum de cases noires enregistré	Pourcentage de cases noires	Nombre des grilles-records réalisées au 1 juin 82
8 x 8	0	0,000 %	24
9 x 9	0	0,000 %	3
10 x 10	3	3,000 %	2
11 x 11	4	3,305 %	1
12 x 12	8	5,555 %	1
13 x 13	12	7,100 %	1
14 x 14	14	7,142 %	1
15 x 15	17	7,555 %	1
16 x 16	20	7,812 %	2

Dans ce tableau, plus la dimension est grande, plus le pourcentage de cases noires augmente, parce que le nombre de mots de grande longueur est réduit.

Les dimensions courantes des grilles vont de 10x10 à 15x15.

On peut remarquer que le nombre des grilles ayant un pourcentage de cases noires inférieur à 8 % est très réduit : les totaux de la dernière colonne cumulent toutes les grilles réalisées en Roumanie depuis 1925 (apparition des premiers problèmes de mots croisés en Roumanie), jusqu'à nos jours. On voit donc que le nombre des grilles-records est négligeable quand on le compare aux milliers de grilles créées. Pour cette raison, la règle qui impose le pourcentage des cases noires, devrait l'établir supérieur à 8 %.

Mais les mots croisés étant des jeux, devaient gagner un large public, il ne fallait donc pas rendre les problèmes trop difficiles. D'où un pourcentage de cases noires au moins égal à 10 %.

Ils ne devaient pas non plus être trop faciles, c'est-à-dire ne nécessiter aucun effort de la part de celui qui les composerait, d'où un pourcentage de cases noires inférieur à 20 %. (Sinon en effet il devient possible de composer des grilles formées en totalité de cases mots de 2 ou 3 lettres).

Pour soutenir la deuxième assertion, on a établi que la longueur moyenne des mots d'une grille  $n \times m$  avec  $p$  cases noires est sensiblement égale à  $\frac{2(n.m - p)}{n + m + 2p}$  (cf. [3], §1, Prop.4).

Pour nous,  $p$  est 20 % de  $n.m$ , il en résulte que

$$\frac{2(n.m - \frac{20}{100} n.m)}{n + m + 2 \cdot \frac{20}{100} n.m} \leq 3 \iff \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \geq \frac{2}{15}.$$

Donc pour des grilles courantes ayant 20 % de cases noires, la longueur moyenne des mots serait inférieure à 3.

Même dans les commencements des jeux de mots croisés, le pourcentage de cases noires n'était pas trop grand : ainsi dans une grille de 1925 de  $11 \times 11$ , on compte 33 cases noires, soit un pourcentage de 27,272 % (cf. [2], p.27).

En se développant, ce jeu s'est imposé des conditions "plus fortes" - c'est-à-dire une diminution des cases noires.

Pour choisir un pourcentage entre 10 et 20 %, il ne reste plus qu'à supposer que la préférence des gens pour les chiffres ronds a joué (les mots croisés sont un jeu, pas besoin de la précision mathématique des sciences). D'où la règle des 15 %.

Une statistique (cf. [3], § 2), montre que le pourcentage de cases noires dans les grilles actuelles est de environ 13,591 %. La règle est donc relativement aisée à suivre et ne peut qu'attirer de nouveaux cruciverbistes.

Pour répondre complètement à la question posée, il faudrait considérer aussi certains aspects philosophiques, psychologiques, et surtout sociologiques, surtout ceux liés à l'histoire de ce jeu, à son développement ultérieur, aux traditions.

#### Bibliographie:

- [1] Marcus Solomon, Edmond Nicolau, S. Stati - "Introducere în lingvistica matematică", Bucarest, 1956 (traduit en italien, Pàtron, Bologna, 1971 ; en espagnol, Teide, Barcelona, 1978).
- [2] Andrei, Dr.N. - "Indreptar rebusist", Editura Sport-Turism, Bucarest, 1981.
- [3] Smarandache, Florentin - "A mathematical linguistic approach to Rebus", publié dans la "Revue roumaine de linguistique", Tome XXVIII, 1983, collection "Cahiers de linguistique théorique et appliquée", Tome XX, 1983, n°1, p.67-76, Bucarest.

OU SE TROUVE LA FAUTE ?  
 (EQUATIONS DIOPHANTIENNES)

Enoncé :

(1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $14x + 26y = -20$ .

"Résolution" : La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = -26k + 6 \\ y = 14k - 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(2) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $15x - 37y + 12z = 0$ .

"Résolution" : La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = k + 4 \\ y = 15k \\ z = 45k - 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $3x - 6y + 5z - 10w = 0$ .

"Résolution" : l'équation s'écrit :

$$3(x - 2y) + 5z - 10w = 0.$$

Puisque  $x, y, z, w$  sont des variables entières, il en résulte que 3 divise  $z$  et que 3 divise  $w$ . C'est-à-dire :

$$z = 3t_1 \quad (t_1 \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad w = 3t_2 \quad (t_2 \in \mathbb{Z}).$$

Donc :  $3(x - 2y) + 3(5t_1 - 10t_2) = 0$  ou  $x - 2y + 5t_1 - 10t_2 = 0$ .

Alors : 
$$\begin{cases} x = 2k_1 + 5k_2 - 10k_3 \\ y = k_1 \\ z = 3k_2 \\ w = 3k_3 \end{cases}$$
 avec  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$ ,

constitue la solution générale entière de l'équation.

Trouver la faute de chaque "résolution" ?

#### SOLUTIONS.

(1)  $x = -26k + 6$  et  $y = 14k - 4$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), est une solution entière pour l'équation (parce qu'elle la vérifie), mais elle n'est pas la solution générale : puisque  $x = -7$  et  $y = 3$  vérifient l'équation, ils en sont une solution entière particulière, mais :

$$\begin{cases} -26k + 6 = -7 \\ 14k - 4 = 3 \end{cases} \quad \text{implique que } k = 1/2 \quad (\text{n'appartient pas à } \mathbb{Z}).$$

Donc on ne peut pas obtenir cette solution particulière de la "solution générale" antérieure.

La vraie solution générale est : 
$$\begin{cases} x = -13k + 6 \\ y = 7k - 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (\text{cf [1]})$$

(2) De même,  $x = 5$  et  $y = 3$  et  $z = 3$  est une solution particulière de l'équation, mais qui ne peut pas se tirer de la "solution générale" puisque :

$$\begin{cases} k + 4 = 5 \\ 15k = 3 \\ 45k - 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1/5 \\ k = 8/45 \end{cases}, \text{ contradictions.}$$

La solution générale entière est :  $\begin{cases} x = k_1 \\ y = 3k_1 + 12k_2 \\ z = 8k_1 + 37k_2 \end{cases}$   
 (avec  $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ )  
 cf. [1].

(3) L'erreur est que : "3 divise  $(5z - 10w)$ " n'implique pas que "3 divise  $z$  et 3 divise  $w$ ". Si on le croit on perd des solutions, ainsi  $(x, y, z, w) = (-5, 0, 5, 1)$  constitue une solution entière particulière qui ne peut pas s'obtenir à partir de la "solution" de l'énoncé.

La résolution correcte est :

$$3(x - 2y) + 5(z - 2w) = 0, \text{ c'est-à-dire } 3p_1 + 5p_2 = 0,$$

avec  $p_1 = x - 2y$  dans  $\mathbb{Z}$ , et  $p_2 = z - 2w$  dans  $\mathbb{Z}$ .

$$\text{Il en résulte : } \begin{cases} p_1 = -5k = x - 2y \\ p_2 = 3k = z - 2w \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

D'où l'on tire la solution générale entière :

$$\begin{cases} x = 2k_1 - 5k_2 \\ y = k_1 \\ z = 3k_2 + 2k_3 \\ w = k_3 \end{cases} \text{ avec } (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3.$$

- [1] On peut trouver ces solutions en utilisant :  
 Florentin SMARANDACHE -"Un algorithme de résolution dans l'ensemble des nombres entiers pour les équations linéaires".

## OU SE TROUVE LA FAUTE SUR LES INTEGRALES ???

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = 2 \sin x \cos x$ . Calculons la primitive de celle-ci :

(1) Première méthode.

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = 2 \int u \, du = 2 \frac{u^2}{2} = u^2 = \sin^2 x, \text{ avec } u = \sin x.$$

On a donc  $F_1(x) = \sin^2 x$ .

(2) Deuxième méthode :

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = -2 \int \cos x (-\sin x) \, dx = -2 \int v \, dv = -v^2,$$

donc  $F_2(x) = -\cos^2 x$ .

(3) Troisième méthode :

$$\begin{aligned} \int 2 \sin x \cos x \, dx &= \int \sin 2x \, dx = 1/2 \int (\sin 2x) 2 \, dx = \\ &= 1/2 \int \sin t \, dt = -1/2 \cos t \text{ donc } F_3(x) = -1/2 \cos 2x. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu 3 primitives différentes de la même fonction. Comment est-ce possible ?

Réponse : Il n'y a aucune faute ! On sait qu'une fonction admet une infinité de primitives (si elle en admet une), qui ne diffèrent que par une constante.

Dans notre exemple on a :

$$\begin{aligned} F_2(x) &= F_1(x) - 1 \quad \text{pour tout réel } x, \\ \text{et } F_3(x) &= F_1(x) - 1/2 \quad \text{pour tout réel } x. \end{aligned}$$

OU SE TROUVE LA FAUTE DANS CE RAISONNEMENT  
PAR RECURRENCE ???

A un concours d'entrée en faculté on a posé le problème suivant :

" Trouver les polynômes  $P(x)$  à coefficients réels tels que  $xP(x-1) = (x-3)P(x)$ , pour tout  $x$  réel."

Quelques candidats ont cru pouvoir démontrer par récurrence que les polynômes de l'énoncé sont ceux qui vérifient la propriété suivante :  $P(x) = 0$  pour tout entier naturel.

En effet, disent-ils, si on pose  $x=0$  dans cette relation, il en résulte que  $0.P(-1) = -3.P(0)$ , donc  $P(0) = 0$ .

De même, avec  $x=1$ , on a :

$$1.P(0) = -2.P(1), \text{ donc } P(1) = 0, \text{ etc...}$$

On suppose que la propriété est vraie pour  $(n-1)$ , c'est à dire que  $P(n-1) = 0$ , où on regarde ce qu'il en est pour  $n$  :

On a :  $n.P(n-1) = (n-3).P(n)$ , et puisque  $P(n-1) = 0$ , il en résulte que  $P(n) = 0$ .

Où la démonstration pèche-t-elle ???

Réponse : Si les candidats avaient essayé le rang  $n=3$ , ils auraient trouvé :

$3.P(2) = 0$ .  $P(3)$  donc  $0 = 0.P(3)$ , ce qui n'entraîne pas que  $P(3)$  est nul : en effet cette égalité est vraie pour tout réel  $P(3)$ .

L'erreur provient donc de ce que l'implication :

$$"(n-3).P(n) = n.P(n-1) = 0 \implies P(n) = 0" \text{ n'est pas juste.}$$

On peut trouver facilement que  $P(x) = x(x-1)(x-2)k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

## PARADOXE MATHÉMATIQUE ?

Propriété : Les axes radicals de  $n$  cercles d'un même plan, pris deux à deux, dont les centres ne sont pas alignés, sont concourants.

"Démonstration" par récurrence sur  $n \geq 3$ .

Pour le cas  $n=3$  on sait que les 3 axes radicals sont concourants en un point qui s'appelle le centre radical. On suppose la propriété vraie pour les valeurs inférieures ou égales à un certain  $n$ .

Aux  $n$  cercles on ajoute le  $(n+1)^{\text{e}}$  cercle.

On a (1) : les axes radicaux des  $n$  premiers cercles sont concourants en  $M$ .

Prenons 4 cercles quelconques, parmi lesquels figure le  $(n+1)^{\text{e}}$ . Ceux-ci ont les axes radicals concourants, conformément à l'hypothèse de récurrence, et au point  $M$  (puisque les 3 premiers cercles, qui font partie des  $n$  cercles de l'hypothèse de récurrence, ont leurs axes radicaux concourant en  $M$ ).

Donc les axes radicaux des  $(n+1)$  cercles sont concourants, ce qui montre que la propriété est vraie pour tout  $n \geq 3$  de  $\mathbb{N}$ .

ET POURTANT, on peut construire le  
Contre-exemple suivant :

On considère le parallélogramme ABCD qui n'a aucun angle droit. Puis on construit 4 cercles de centres respectifs A, B, C et D, et de même rayon. Alors les axes radicaux des cercles  $\mathcal{C}(A)$  et  $\mathcal{C}(B)$ , respectivement  $\mathcal{C}(C)$  et  $\mathcal{C}(D)$ , sont deux droites, médiatrices respectivement des segments AB et CD. Comme (AB) et (CD) sont parallèles, et que le parallélogramme n'a aucun angle droit, il en résulte que les deux axes radicaux sont parallèles ... c'est-à-dire qu'ils ne se coupent jamais.

Expliquer cette (apparente !) contradiction avec la propriété antérieure ?

Réponse : La "propriété" est vraie seulement pour  $n = 3$ . Or dans la démonstration proposée on utilise la prémissse (fausse) selon laquelle pour  $n=4$  la propriété serait vraie. Pourachever la preuve par récurrence il faudrait pouvoir montrer que  $P(3) \Rightarrow P(4)$ , ce qui n'est pas possible puisque  $P(3)$  est vraie mais que le contre-exemple prouve que  $P(4)$  est fausse.

B I B L I O G R A P H I E  
DU MÊME AUTEUR

LIVRES DE MATHEMATIQUES :

- 1) "Problèmes avec et sans... problèmes !" , Somipress, Fès (Maroc), 1983.
- 2) "Généralisations et généralités" , Fès (Maroc) , 1984.

ARTICLES ET NOTES MATHEMATIQUES :

- 1) "Deducibility theorems in mathematics logic", dans la revue "Analele Universității Timișoara" ,seria st.mathematice, Vol.XVII, fasc.2, p.163-168, 1979. (\*)
- 2) "A function in the numbers theory", in "An.Univ.Timișoara", seria st.mathematice, Vol.XVIII, fasc.1,p.79-88, 1980. Article recensé dans "M.R":83e:10008.
- 3) "Baze de soluții pentru congruențe liniare", in revue "Buletinul Universității din Brașov", seria C-Matematică, Vol.XXII,p.25-31, 1980. Republié dans la revue "Euler.st. și tehn. al Inst.Polit."Traian Vuia" Timișoara", seria Matematică-Fizică, Tom.26(40), fasc.2, p.13-16, 1981. Recensé dans "M.R":83e:10024.
- 4) "O familie de serii convergente", in revue "Licăriri" (Craiova),nr.30/1980.
- 5) "Criterii ca un număr natural să fie prim", in revue "Gazeta Matematică",p.49-52,nr.2/1981.  
Republié dans "Matematikai lapok"(Cluj-Napoca). Article recensé dans "M.R":83a:10007.
- 6) "Unde este greșeala?", in revue "Gazeta Matematică", nr.7/1981. Republié dans "Matematikai Lapok" (Cluj-Napoca).
- 7) "O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruențe", in revue "Bulet.Univ.Brașov", seria C-Matematică, Vol.XXIII,p.07-12, 1981.
- 8) "O generalizare a inegalității Cauchy-Buniakovsky-Schwartz", in revue "Gazeta Matematică", p.386, nr.9-10/ 1982. Republié dans "Matematikai Lapok" (Cluj-Napoca).
- 9) "A mathematical linguistic approach to Rebus", in "Revue roumaine de linguistique", Tome XXVIII, 1983, collection "Cahiers de linguistique théorique et appliquée", Tome XX, nr.1,p.67-76, 1983.

PROBLÈMES PROPOSÉS :

Publiés dans les revues : "Gazeta Matematică" (Bucarest),"R.A.T" (Timișoara), "Licăriri" (Craiova), "Matematikai Lapok"(Cluj-Napoca), "Ştiință și tehnică" (Bucarest), "Năzuințe" (Craiova), "Enigmistica" (Craiova), "Caiet 32" (Craiova).

(\*) Article recensé dans "Mathematical Reviews" (USA):82a:03012.  
Cette revue figure dans la suite sous l'abréviation "M.R".